

1 Begriff des Differentialquotienten

Wir betrachten hier das folgende naheliegende geometrische Problem. Gegeben sei eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$ und ein Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ ihres Graphen $\Gamma(f)$ in der (x, y) -Ebene. Gesucht ist die Tangente im Punkt P an dem Graphen $\Gamma(f)$.

Als Gerade durch den Punkt P wird die Tangente durch eine Gleichung der Form

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet m die Steigung der Tangente, also die **Steigung des Graphen im Punkt** P . Diese gilt es zu berechnen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Gerade durch P und Q , wobei Q der Punkt des Graphen von f ist, welcher zum x -Wert $x_0 + \Delta x$ gehört. Es gilt folglich $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Die Steigung dieser Sekante ist gegeben durch den Quotienten (*Differenzenquotienten*, siehe Figur 1)

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Lassen wir nun Δx gegen Null streben, d.h. betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

so wird dieser – falls er existiert – die Steigung der Tangente beschreiben.

Definition (I. Newton 1642-1727, G. W. Leibniz 1646-1716) Der Grenzwert

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heisst **Differentialquotient** von f an der Stelle x_0 .

Existiert der Differentialquotient von f an der Stelle x_0 , so heisst f **differenzierbar** in x_0 . Existiert der Differentialquotient von f für jedes x im Definitionsbereich $D(f)$ von f , so heisst f *differenzierbar* schlechthin. In diesem Fall definiert die Zuordnung

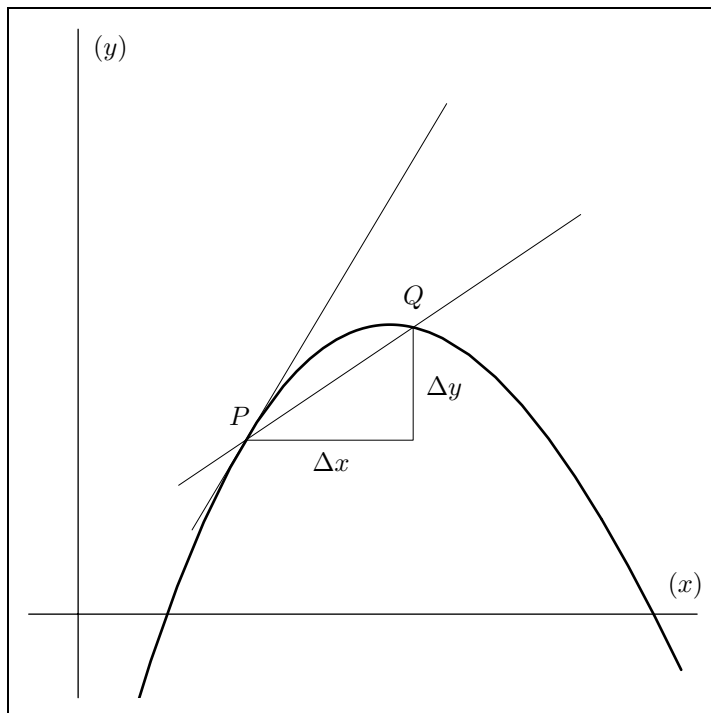


FIG. 1 :
Differenzenquotient,
Differentialquotient

$$x \rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

eine Funktion f' mit $D(f') = D(f)$, welche **Ableitung** oder **Derivierte** von f heisst.

Ist f differenzierbar in x_0 , so ist f auch stetig in x_0 . Existiert nämlich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

so muss notwendigerweise mit Δx auch $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gegen Null streben. Es gilt folglich

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Damit ist die Funktion stetig in x_0 .

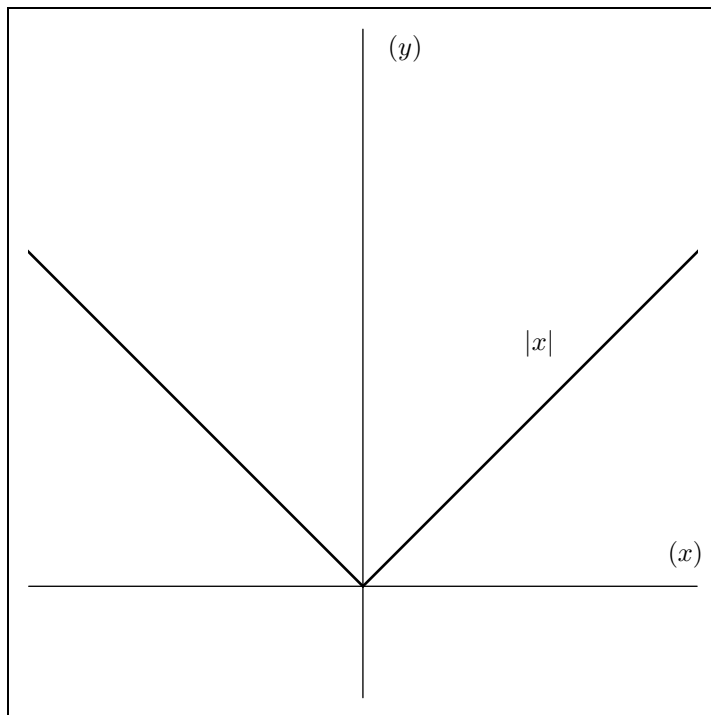


FIG. 2:
Zur Existenz des
Differentialquotienten

In der Definition der Differenzierbarkeit fordert man die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

d.h. der linke und der rechte Grenzwert ($\Delta x \rightarrow 0^-$ bzw. $\Delta x \rightarrow 0^+$) müssen existieren und miteinander übereinstimmen. Natürlich gibt es Beispiele, wo diese Grenzwerte zwar existieren, aber *nicht* übereinstimmen. In diesem Fall spricht man vom linksseitigen, bzw. rechtsseitigen Differentialquotienten von f in x_0 . Als konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion $f : x \rightarrow |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ (siehe Figur 2). Offensichtlich gilt hier

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = +1. \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist nämlich Δx negativ, während es im zweiten Fall positiv ist.

Für einfache Funktionen lassen sich die Ableitungen direkt berechnen. Klar ist zum Beispiel, dass für die Ableitung der konstanten Funktion $f : x \rightarrow C$ gilt: $f'(x) = 0$. Für $g : x \rightarrow x$

erhält man auf ähnliche Weise wie oben $g'(x) = 1$. Etwas komplizierter ist die Berechnung in den folgenden Beispielen.

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow x^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\
 &= 2x .
 \end{aligned}$$

Beispiel Es sei $f : x \rightarrow \sin x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{d \sin}{dx}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right) \left(\frac{1 + \cos \Delta x}{1 + \cos \Delta x} \right) \sin x \right) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \frac{\sin^2(\Delta x)}{(\Delta x)^2} \frac{\Delta x}{1 + \cos \Delta x} \sin x \right) \\
 &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right)^2 \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{1 + \cos \Delta x} \right) \sin x \\
 &= \cos x .
 \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\frac{d \cos}{dx}(x) = -\sin x .$$

Diese Beispiele zeigen, dass die Berechnung der Ableitung schon für recht einfache Funktionen aufwendig ist, wenn man von der Definition des Differentialquotienten ausgeht. Dieser Aufwand kann wesentlich reduziert werden, wenn “das Ableiten” zu einem Kalkül ausgebaut wird: Der Übergang von der Funktion f zur Ableitungsfunktion f' genügt einigen einfachen Rechenregeln, die erlauben, die Ableitung einer Funktion auf weitgehend mechanische Weise zu berechnen. Es sind dies einmal die folgenden vier Regeln und die etwas weiter unten zu behandelnde Kettenregel.

Es seien $f : x \rightarrow f(x)$ und $g : x \rightarrow g(x)$ zwei in x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) ,$$

$$(Cf)'(x) = C \cdot f'(x) , \quad C \in \mathbb{R} ,$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{Produktregel}) ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{Quotientenregel}).$$

Bei der Quotientenregel muss natürlich $g(x) \neq 0$ vorausgesetzt werden.

Diese Rechenregeln sind aus der Mittelschule bekannt und werden aus diesem Grund hier nicht bewiesen. Statt dessen wenden wir sie in einzelnen Beispielen an.

Beispiel Es sei $h : x \rightarrow x^3 = x^2 \cdot x$. Für $f : x \rightarrow x^2$ und $g : x \rightarrow x$ ergibt die Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^3 = h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 \\ &= 3x^2 . \end{aligned}$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so ergibt sich auf analoge Weise durch vollständige Induktion

$$\frac{d}{dx}x^m = m \cdot x^{m-1} .$$

Beispiel Es sei $h : x \rightarrow 1/x^m = x^{-m}$, m positiv ganz. Für $f : x \rightarrow 1$ und $g : x \rightarrow x^m$ ergibt die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} x^{-m} = h'(x) = \frac{-1 \cdot m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \frac{1}{x^{m+1}} = -m x^{-m-1} .$$

Beispiel Es sei $h : x \rightarrow \tan x$. Für $f : x \rightarrow \sin x$ und $g : x \rightarrow \cos x$ ergibt die Quotientenregel

$$\frac{d \tan}{dx} (x) = \frac{d \sin x}{dx \cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Analog erhält man

$$\frac{d \cot}{dx} (x) = -\frac{1}{\sin^2 x} .$$

Eine weitere wichtige Ableitungsregel ist die sogenannte *Kettenregel*. Sie lautet wie folgt:

Kettenregel Es seien $f : x \rightarrow f(x)$ und $g : x \rightarrow g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen und $h : x \rightarrow f \circ g(x) = f(g(x))$ sei die zusammengesetzte Funktion. Dann gilt

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} (x) = h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) .$$

Der erste Faktor heisst “äussere”, der zweite Faktor “innere” Ableitung.

Beweis Laut Definition der Ableitung haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ g)}{dx} (x) = F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f \circ g(x + \Delta x) - f \circ g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \end{aligned}$$

Wir setzen $g(x + \Delta x) - g(x) = d$ und beachten, dass mit Δx auch d gegen Null strebt, denn da g in x differenzierbar ist, ist es auch stetig in x . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(g(x) + d) - f(g(x))}{d} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + d) - f(g(x))}{d} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x) . \end{aligned}$$

Dies war zu beweisen.

Beispiel Es sei $F : x \rightarrow \tan(x^2)$. Für $f : x \rightarrow \tan x$, $g : x \rightarrow x^2$ liefert die Kettenregel für die zusammengesetzte Funktion $F : x \rightarrow f \circ g(x) = f(g(x))$.

$$\frac{d}{dx} \tan(x^2) = F'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot 2x .$$

Beispiel Es sei $F : x \rightarrow (g(x))^m$. Für $f : x \rightarrow x^m$ ist $F = f \circ g$. Die Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dx} (g(x))^m = F'(x) = m \cdot (g(x))^{m-1} \cdot g'(x) .$$

Beispiel Es sei $G : x \rightarrow g(x^m)$. Für $f : x \rightarrow x^m$ ist $G = g \circ f$ (Man beachte die Reihenfolge!). Die Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dx} g(x^m) = G'(x) = g'(x^m) \cdot mx^{m-1} .$$

Beispiel Es sei $H : x \rightarrow (1 + (1 + x^2)^4)^7$. Die Kettenregel liefert, zweimal hintereinander angewandt,

$$\frac{dH}{dx}(x) = H'(x) = 7 \left(1 + (1 + x^2)^4 \right)^6 \cdot 4(1 + x^2)^3 \cdot 2x .$$

Eine weitere Anwendung der Kettenregel betrifft die **Ableitung der inversen Funktion**. Es sei $f : x \rightarrow f(x)$ eine injektive Funktion. Ihre Ableitung $f' : x \rightarrow f'(x)$ sei bekannt. Gesucht ist $(f^{-1})'(x)$, die Ableitung der zu f inversen Funktion. Laut Definition der inversen Funktion gilt

$$f \circ f^{-1}(x) \equiv x .$$

Setzen wir $f^{-1} = g$ und wenden wir die Kettenregel an, so folgt

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \equiv 1 .$$

Auflösen nach $(f^{-1})'(x)$ liefert

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} .$$

Als Zusatz bemerken wir noch folgendes. Ist y der Funktionswert der Funktion f an der Stelle x , so sagt man in einer etwas altertümlichen Sprechweise manchmal, dass " y eine Funktion von x " sei. Ist f injektiv, so stellt die inverse Funktion f^{-1} " x als Funktion von y " dar. Die obige Beziehung zwischen den Ableitungen drückt sich dann in der einprägsamen Formel

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)}$$

aus. Dabei ist das Argument y auf der linken Seite der Gleichung gleich dem Funktionswert von f an der Stelle x . (Man beachte, dass man *heutzutage* die Variable der inversen Funktion f^{-1} wenigstens in formalen Darstellungen durchwegs gleich benennt wie die Variable der Funktion f .)

Beispiel Es sei $g : x \rightarrow x^{1/m}$, m positiv ganz, $D(g) = [0, \infty)$. Definitionsgemäss ist g die Umkehrfunktion der Funktion $f : x \rightarrow x^m$. Die obige Formel liefert

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{m}} = g'(x) = \frac{1}{m \cdot (x^{\frac{1}{m}})^{m-1}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} .$$

Beispiel Es sei $g : x \rightarrow \arcsin x$. Laut Definition ist g die Umkehrfunktion von $f : x \rightarrow \sin x$, $D(f) = [-\pi/2, +\pi/2]$. Die obige Formel liefert

$$\frac{d \arcsin}{dx}(x) = g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beispiel Es sei $h : x \rightarrow \arctan x$. Laut Definition ist h die Umkehrfunktion von $f : x \rightarrow \tan x$, $D(f) = (-\pi/2, +\pi/2)$. Die obige Formel liefert

$$\frac{d \arctan}{dx}(x) = h'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wir beschliessen den Abschnitt mit zwei konkreten geometrischen Problemen.

Beispiel Wir stellen uns die folgende Aufgabe. Es sei die Parabel $y = x^2$ gegeben. Es sei P_0 ein von Ursprung verschiedener, aber sonst beliebiger Punkt dieser Parabel und t_0 sei die zugehörige Tangente. Man finde den Punkt P_1 auf der Parabel, dessen zugehörige Tangente t_1 senkrecht zu t_0 verläuft und bestimme den Schnittpunkt S von t_0 und t_1 (siehe Figur 3).

Wir fassen die Parabel $y = x^2$ als Graph der Funktion $f : x \rightarrow x^2$ auf. Der beliebige Punkt P_0 gehöre zum x -Wert x_0 , $x_0 \neq 0$. Dann gilt $P_0 = (x_0, x_0^2)$. Da die Ableitung durch $f'(x) = 2x$ gegeben ist, hat t_0 die Steigung $2x_0$. Die Geradengleichung von t_0 lautet somit

$$(1.1) \quad y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$

Die Gerade t_1 steht senkrecht zu t_0 , sie hat also die Steigung $-1/(2x_0)$. Für den gesuchten Punkt $P_1 = (x_1, x_1^2)$ der Parabel muss deshalb die Gleichung

$$2x_1 = -\frac{1}{2x_0}$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich

$$x_1 = -\frac{1}{4x_0},$$

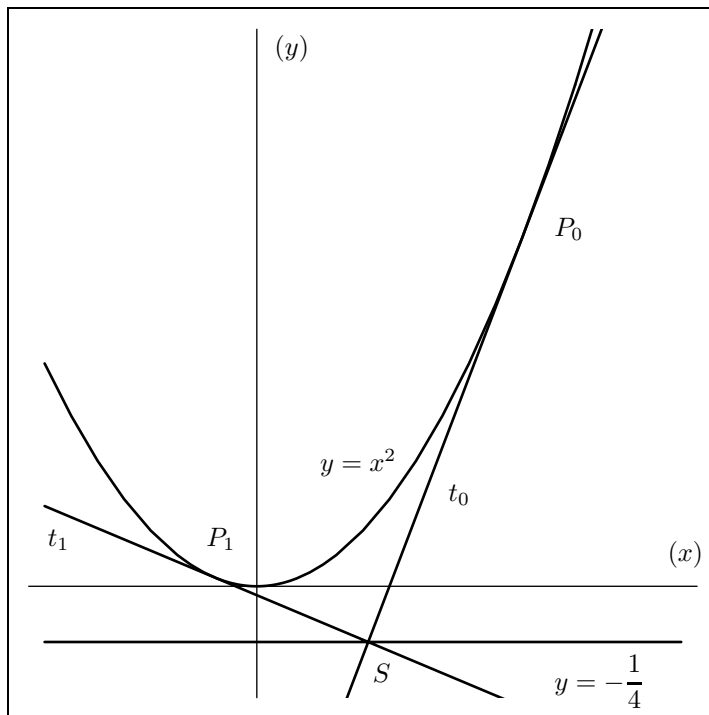


FIG. 3:
Senkrecht stehende Tangenten
an die Parabel $y = x^2$

und die Geradengleichung von t_1 lautet somit

$$(1.2) \quad y - \frac{1}{16x_0^2} = -\frac{1}{2x_0} \left(x + \frac{1}{4x_0} \right) .$$

Wir erhalten den Schnittpunkt S der beiden Geraden t_0, t_1 , indem wir das aus den Gleichungen (1.1) und (1.2) gebildete System nach x und y auflösen. Für die Koordinaten von S ergibt sich

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{8x_0} \\ y = -\frac{1}{4} . \end{array} \right.$$

Der Schnittpunkt von t_0 und t_1 liegt also unabhängig vom Ausgangspunkt P_0 auf der Parallelen $y = -1/4$ zur x -Achse. Ein überraschendes Resultat!

Beispiel Es sei wiederum P_0 ein vom Ursprung des Koordinatensystems verschiedener, beliebiger Punkt der Parabel $y = x^2$. Die zugehörige Tangente sei t_0 , die zugehörige Normale

n_0 . Der Punkt P_2 sei der Schnittpunkt von n_0 mit der Parabel und t_2 die zugehörige Tangente. Man bestimme den Schnittpunkt von t_0 und t_2 (siehe Figur 4).

Wie oben ist die Tangente t_0 im Punkt P_0 , $P_0 = (x_0, x_0^2)$ durch die Gleichung

$$(1.3) \quad y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$$

gegeben, die Normale n_0 durch P_0 demzufolge durch

$$y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) .$$

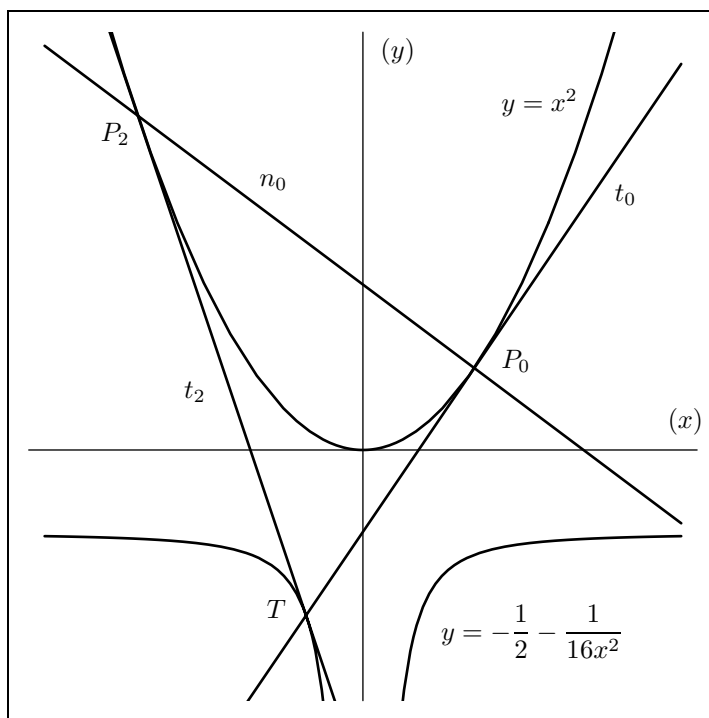


FIG. 4:
Schnittpunkt der Tangenten t_0
und t_2 an die Parabel $y = x^2$

Um P_2 zu erhalten, löst man das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} y - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \\ y = x^2 \end{array} \right|$$

nach x und y auf. Die eine Lösung ist natürlich $x = x_0, y = x_0^2$; die andere ergibt sich zu

$$x = -x_0 - \frac{1}{2x_0}, \quad y = \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^2.$$

Daraus erhält man $P_2 = (-x_0 - 1/(2x_0), (x_0 + 1/(2x_0))^2)$ und die Tangente t_2 ist durch die Gleichung

$$(1.4) \quad y - \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^2 = -2 \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right) \left(x + \left(x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)\right)$$

gegeben. Löst man das durch die Gleichungen (1.3) und (1.4) gebildete System nach x und y auf, so erhält man die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes T , nämlich

$$\left| \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4x_0} \\ y = -\frac{1}{2} - x_0^2 \end{array} \right.$$

Eliminieren wir schliesslich x_0 , so ergibt sich die Gleichung der durch den Schnittpunkt gebildeten Kurve K . Sie lautet

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{16x^2}.$$