

## 12 Systeme von Differentialgleichungen

Wir wollen in den drei letzten Abschnitten dieses Kapitels Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachten. Dabei beschränken wir uns, vor allem um die Darstellung möglichst anschaulich zu halten, auf Systeme von zwei Differentialgleichungen. Die Übertragung auf grössere Systeme wird dem Leser keine Schwierigkeiten machen. Im vorliegenden Abschnitt stellen wir einige einfache Tatsachen zusammen, im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns eingehender mit linearen autonomen Systemen, und im übernächsten Abschnitt sprechen wir kurz über das Stabilitätsverhalten der Lösungen.

Unter einem System von Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Funktionen  $x \rightarrow y_1(x)$ ,  $x \rightarrow y_2(x)$  versteht man zwei Differentialgleichungen der Form

$$(12.1) \quad \left| \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{array} \right| ,$$

wobei  $f_1, f_2$  Funktionen der drei Variablen  $x, y_1, y_2$  sind. Eine Lösung des Systems (12.1) ist ein Paar von Funktionen

$$x \rightarrow y_1(x) , \quad x \rightarrow y_2(x),$$

welche die beiden Gleichungen des Systems simultan erfüllen.

**Beispiel** Es sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(12.2) \quad y'' = F(x, y, y')$$

gegeben. Führen wir die neuen Funktionen  $x \rightarrow y_1(x) = y(x)$  und  $x \rightarrow y_2(x) = y'(x)$  ein, so erhalten wir ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(12.3) \quad \left| \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = F(x, y_1, y_2) \end{array} \right| .$$

Es ist klar, dass jede Lösung der Differentialgleichung (12.2) Anlass gibt zu einer Lösung des Systems (12.3) und umgekehrt. Daraus folgt, dass man *statt Differentialgleichungen höherer Ordnung auch Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachten kann*.

Wie für Differentialgleichungen höherer Ordnung gilt für Systeme ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

**Satz 12.1** *Es sei das System (12.1) von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung gegeben. Die Funktionen  $f_1, f_2$  seien stetig in  $x$  und stetig partiell nach  $y_1, y_2$  differenzierbar. Dann gibt es zu vorgegebenen  $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}$  genau ein Paar von Funktionen  $x \rightarrow y_1(x), x \rightarrow y_2(x)$ , welches Lösung des Systems (12.1) ist und den Anfangsbedingungen*

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad y_2(x_0) = y_{2,0}$$

*genügt.*

Der Leser mache sich an dieser Stelle klar, dass aus Satz 12.1 der Satz 8.1 über Differentialgleichungen höherer Ordnung folgt. Das Differentialgleichungssystem (12.1) heisst **autonom**, falls die zu den gesuchten Funktionen  $y_1, y_2$  gehörige Variable  $x$  nicht explizit auftritt.

**Beispiel** Die Differentialgleichung für die Ortsfunktion  $t \rightarrow x(t)$  eines eindimensionalen gedämpften Oszillators lautet (siehe Abschnitt 11)

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0 .$$

Dieser Differentialgleichung 2. Ordnung entspricht das folgende System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Funktionen  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow v(t) = \dot{x}(t)$

$$(12.4) \quad \begin{vmatrix} \dot{x} &= & v \\ \dot{v} &= & -2\lambda v - \omega^2 x \end{vmatrix} .$$

Die zu den gesuchten Funktionen  $x$  und  $v$  gehörige Variable ist hier die Zeit und heisst dementsprechend  $t$ . Sie kommt im Differentialgleichungssystem (12.4) nicht explizit vor; das System (12.4) ist autonom.

Im Folgenden wollen wir nur autonome Systeme betrachten. Aus Gründen der Anschaulichkeit, die gleich deutlicher werden, ist es dann angebracht, dem obigen Beispiel folgend die Variable der gesuchten Funktion mit  $t$  zu bezeichnen. Ausserdem wollen wir in diesem Abschnitt die beiden gesuchten Funktionen  $t \rightarrow x(t)$  und  $t \rightarrow y(t)$  nennen. Unser autonomes System lässt sich somit in der folgenden Form schreiben:

$$(12.5) \quad \begin{vmatrix} \dot{x} &= & f_1(x, y) \\ \dot{y} &= & f_2(x, y) \end{vmatrix} .$$

Es liegt nahe, die in der  $(x, y)$ -Ebene definierten Funktionen  $f_1 : (x, y) \rightarrow f_1(x, y), f_2 : (x, y) \rightarrow f_2(x, y)$  als Komponenten eines zweidimensionalen Vektorfeldes  $\vec{v} : (x, y) \rightarrow \vec{v}(x, y)$  zu interpretieren:

$$\vec{v}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) .$$

Eine Lösung des Differentialgleichungssystems (12.5) kann dann als Parameterdarstellung  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  einer **Feldlinie** des Vektorfeldes  $\vec{v}$  aufgefasst werden. In der Tat besagt ja (12.5), dass der Tangentialvektor  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  der Kurve  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  gerade mit dem Feldvektor in  $(x, y)$  übereinstimmt. Fasst man – etwas konkreter –  $t$  als Zeit und das Vektorfeld  $\vec{v}$  als (stationäres!) Strömungsfeld in der Ebene auf, so beschreibt  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  die Bewegung eines Teilchens im Strömungsfeld, und der Vektor  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  ist der Geschwindigkeitsvektor dieses Teilchens.

Aus unserem Existenz- und Eindeutigkeitsatz (Satz 12.1) folgt, dass durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  eine eindeutig bestimmte Kurve  $K$  geht, die durch die Lösung des Systems (12.5) mit den Anfangsbedingungen  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  beschrieben wird. Diese Kurve, versehen mit ihrer Durchlaufrichtung(!), heisst die durch  $(x_0, y_0)$  verlaufende **Trajektorie**; die Schar der Trajektorien nennt man das **Phasenporträt** des Systems.

Die Eindeutigkeitsaussage liefert unmittelbar, dass sich zwei Trajektorien nicht schneiden können, es sei denn, sie fallen in ihrem ganzen Verlauf zusammen.

Das Phasenporträt eines autonomen Differentialgleichungssystems enthält wichtige Informationen über die Lösungen; insbesondere kann an ihm das Stabilitätsverhalten der Lösungen abgelesen werden (siehe Abschnitt 14). Dies ist deshalb eine wichtige Bemerkung, weil es im allgemeinen sehr viel leichter ist, das Phasenporträt eines System zu berechnen, als das System selbst vollständig zu lösen. Wir versuchen dies am folgenden Beispiel zu illustrieren.

**Beispiel** Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra (A.J. Lotka 1880-1949; V. Volterra 1860-1940). Hier beschreibt  $t \rightarrow x(t)$  die Grösse einer Räuberpopulation, die sich von einer einzigen Beuteart ernährt, und  $t \rightarrow y(t)$  die Grösse der Beutepopulation. Das Lotka-Volterra-Modell besagt, dass die beiden Populationsgrössen dem Differentialgleichungssystem

$$(12.6) \quad \begin{cases} \dot{x} &= -a_1x + b_1xy \\ \dot{y} &= a_2y - b_2xy \end{cases}$$

genügen. Dabei sind  $a_1, a_2, b_1, b_2$  positive reelle Zahlen. (Wir verzichten hier auf eine Begründung für die Form dieser Differentialgleichungen, denn wir sind ja vor allem an der Mathematik interessiert.) Man kann zeigen, dass sich die Lösungen dieses Systems nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen. Hingegen ist das Phasenporträt relativ leicht zu berechnen. Dieses besteht aus den Feldlinien des Vektorfeldes

$$\vec{v}: (x, y) \rightarrow \vec{v}(x, y) = (-a_1x + b_1xy, a_2y - b_2xy)$$

(versehen mit dem entsprechenden Durchlaufsinne). Beschreibt man die Feldlinien als Graphen der Funktion  $x \rightarrow y(x)$ , so lassen sie sich als Lösungen der Differentialgleichung

$$(12.7) \quad y' = \frac{a_2y - b_2xy}{-a_1x + b_1xy}$$

bestimmen. Diese Differentialgleichung ist separierbar und ist deshalb leicht lösbar. Wir erhalten der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y(a_2 - b_2x)}{x(b_1y - a_1)} \\
 \left(\frac{b_1y - a_1}{y}\right) dy &= \left(\frac{a_2 - b_2x}{x}\right) dx \\
 b_1y - a_1 \log|y| &= a_2 \log|x| - b_2x + C \\
 \frac{e^{b_1y}}{|y|^{a_1}} &= e^C \frac{|x|^{a_2}}{e^{b_2x}} \\
 \frac{|x|^{a_2}}{e^{b_2x}} \cdot \frac{|y|^{a_1}}{e^{b_1y}} &= A,
 \end{aligned}$$

wobei wir  $A = 1/e^C$  gesetzt haben. Das Phasenporträt des Systems (12.6) besteht folglich aus den Niveaulinien der Funktion

$$(x, y) \rightarrow \frac{x^{a_2}}{e^{b_2x}} \cdot \frac{y^{a_1}}{e^{b_1y}}$$

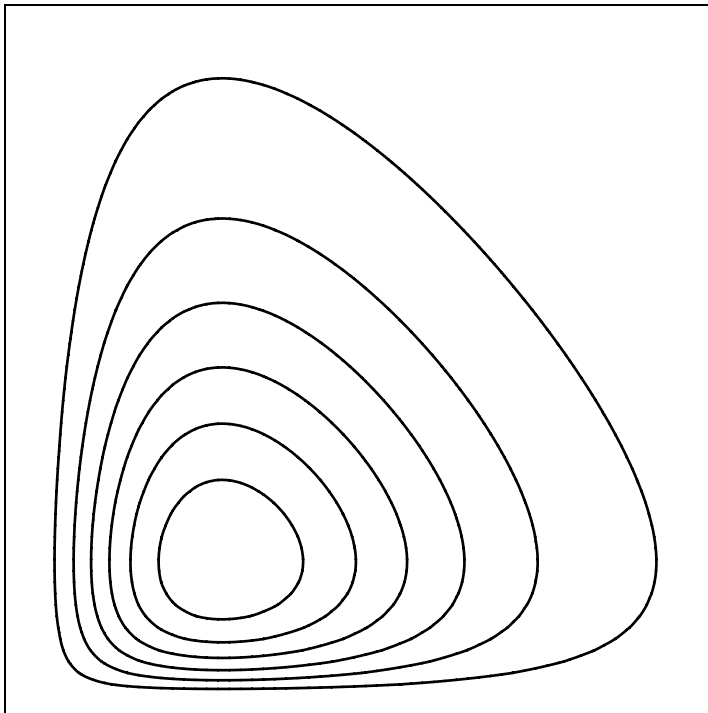


FIG. 1:  
Das Phasenporträt der  
Lotka-Volterra-Gleichungen

(versehen mit dem einfach zu bestimmenden Durchlaufsinne). Mit etwas Mühe lassen sich die Niveaulinien diskutieren. Das wollen wir im einzelnen hier nicht durchführen, sondern uns

einfach das Bild ansehen. Wir lesen daraus sofort eine ganze Menge über die Lösungen des Systems (12.6) ab. Ist die Beutepopulation  $y(t)$  gross, so wird die Räuberpopulation  $x(t)$  gute Bedingungen vorfinden und sich vergrössern. Damit wächst der Druck auf die Beutepopulation, so dass diese schliesslich abnimmt. Mit der Zeit wird die Beutepopulation zu klein, um die Räuberpopulation zu erhalten, so dass diese ihrerseits unter Druck gerät und abnimmt. Dies gibt aber der Beutepopulation eine Überlebenschance, so dass diese wieder zunimmt, und nach einiger Zeit auch zu einer Vergrösserung der Räuberpopulation führt, etc. Offenbar ergibt sich aus diesem Modell ein periodisches wechselweises Anwachsen und Abnehmen der Räuber- bzw. Beutepopulation.

Mehr als die Frage, ob dieses Modell die Wirklichkeit in vernünftiger Weise beschreibt, interessiert uns hier die Tatsache, dass wir aus dem Phasenporträt eine Menge von qualitativen Informationen über die Lösungen des Systems herleiten konnten. Die Lösungen des Differentialgleichungssystems selbst haben wir dazu gar nicht benötigt.

Schliesslich wollen wir noch auf Folgendes aufmerksam machen. In unserem Beispiel ist die Trajektorie durch den Punkt  $(x_0, y_0) = (a_2/b_2, a_1/b_1)$  ausgeartet: sie besteht nur aus diesem einen Punkt. In der Tat bilden die konstanten Funktionen

$$t \rightarrow x(t) = a_2/b_2, \quad t \rightarrow y(t) = a_1/b_1$$

eine Lösung des Systems. In diesem Fall sind Räuber- und Beutepopulation im Gleichgewicht. Dies legt die folgende allgemeine Definition nahe.

Ein Punkt  $(x_0, y_0)$  der  $(x, y)$ -Ebene mit der Eigenschaft, dass  $t \rightarrow x(t) = x_0$  und  $t \rightarrow y(t) = y_0$  eine Lösung des Systems bilden, heisst **Gleichgewichtspunkt**. Die Kenntnis der Gleichgewichtspunkte eines autonomen Systems, sowie das Phasenporträt in der Umgebung dieser Punkte erlauben sehr oft, weitgehende Aussagen über das Verhalten der Lösungen des Systems. Darauf gehen wir in Abschnitt 14 noch etwas näher ein.