

14 Stabilitätsverhalten

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Stabilitätsverhalten der Lösungen eines autonomen Differentialgleichungssystems. Dabei beschränken wir uns auf lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten, weil in diesem Fall die Behandlung recht einfach ist, andererseits aber doch die wesentlichen Punkte illustriert werden können.

Es sei

$$(14.1) \quad \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

ein lineares autonomes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten mit

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ein solches System (14.1) besitzt offensichtlich den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$. Es geht in diesem Abschnitt um die "Stabilität" dieses Gleichgewichtspunktes, d.h. um das Verhalten der Lösungen in der Nähe dieses Punktes. Zu diesem Zweck lösen wir das System (14.1), in dem wir es auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Wir erhalten durch Elimination von x_2 leicht

$$(14.2) \quad \ddot{x}_1 - (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = 0.$$

Auf analoge Weise erhält man durch Elimination von x_1 eine Differentialgleichung für x_2 . Die allgemeine Lösung von (14.2) hängt von den Nullstellen α_1, α_2 des zugehörigen charakteristischen Polynoms, d.h. von den Lösungen der Gleichung

$$(14.3) \quad \alpha^2 - (a_{11} + a_{22})\alpha + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

ab. Der Leser stellt natürlich sofort fest, dass das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (14.2) nichts anderes ist als das charakteristische Polynom der Matrix A im Sinne der linearen Algebra. Daraus folgt unter anderem, dass die aus dem System (14.1) gewonnenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für x_1 und x_2 beide zum gleichen charakteristischen Polynom und deshalb im wesentlichen auch zu denselben Lösungsfunktionen führen. Diese sind nur abhängig von den Eigenwerten der Matrix A . Insbesondere wird das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunktes $(0, 0)$ von diesen Eigenwerten bestimmt. Es gilt nun, die verschiedenen Fälle zu diskutieren.

1. $\alpha_1 \leq \alpha_2 < 0$.

In diesem Fall sind die Funktionen x_1 und x_2 beide von der Form

$$C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \quad \text{bzw.} \quad C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 t e^{\alpha_2 t}.$$

Sie nehmen deshalb mit zunehmendem t exponentiell ab. Sämtliche Trajektorien laufen mit wachsendem t asymptotisch in den Nullpunkt hinein. Der Gleichgewichtspunkt heisst in diesem Fall *asymptotisch stabil*.

Beispiel Das zum gedämpften harmonischen Oszillator gehörige System

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 &= & x_2 \\ \dot{x}_2 &= & -\omega^2 x_1 - 2\lambda x_2 \end{vmatrix}$$

liefert im Fall starker Dämpfung $\lambda \geq \omega$ ein Beispiel für diesen Fall. Die Eigenwerte sind beide negativ. Das Phasenporträt lässt sich leicht berechnen (siehe Figur 1).

2. $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

Die Funktionen x_1 und x_2 setzen sich in diesem Fall aus einem exponentiell zunehmenden und einem exponentiell abnehmenden Anteil zusammen. Jede Trajektorie “flieht” den Nullpunkt und läuft mit zunehmendem t ins Unendliche. Der Gleichgewichtspunkt ist *instabil*.

Beispiel Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 &= & x_2 \\ \dot{x}_2 &= & 2x_1 \end{vmatrix},$$

(das zwei Populationen beschreibt, die in Symbiose leben) ist von dieser Art. Die Eigenwerte sind reell und haben verschiedenes Vorzeichen. Das Phasenporträt zeigt im Nullpunkt einen “Sattel” (siehe Figur 3).

3. $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$.

Die Funktionen x_1 und x_2 nehmen mit wachsendem t exponentiell zu; die Trajektorien “fliehen” deshalb den Nullpunkt. Dieser ist *instabil*.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 &= & x_1 \\ \dot{x}_2 &= & x_1 + x_2 \end{vmatrix}.$$

Hier hat man einen zweifachen positiven Eigenwert. Das Phasenporträt zeigt aus dem Nullpunkt herauslaufende Trajektorien (siehe Figur 2).

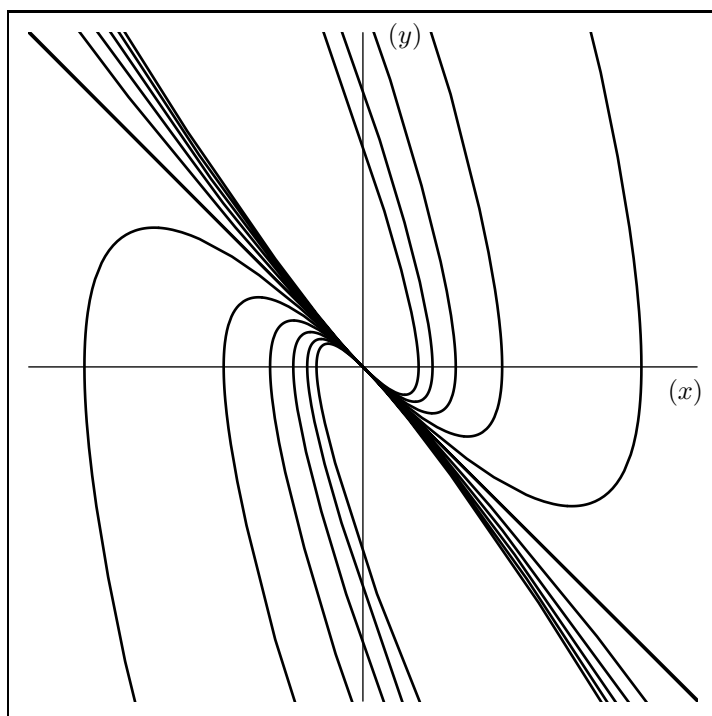


FIG. 1:
Phasenporträt für zwei verschiedene Eigenwerte mit gleichem Vorzeichen. Für positives Vorzeichen laufen die Trajektorien vom Nullpunkt weg, für negatives Vorzeichen laufen sie in den Nullpunkt hinein.

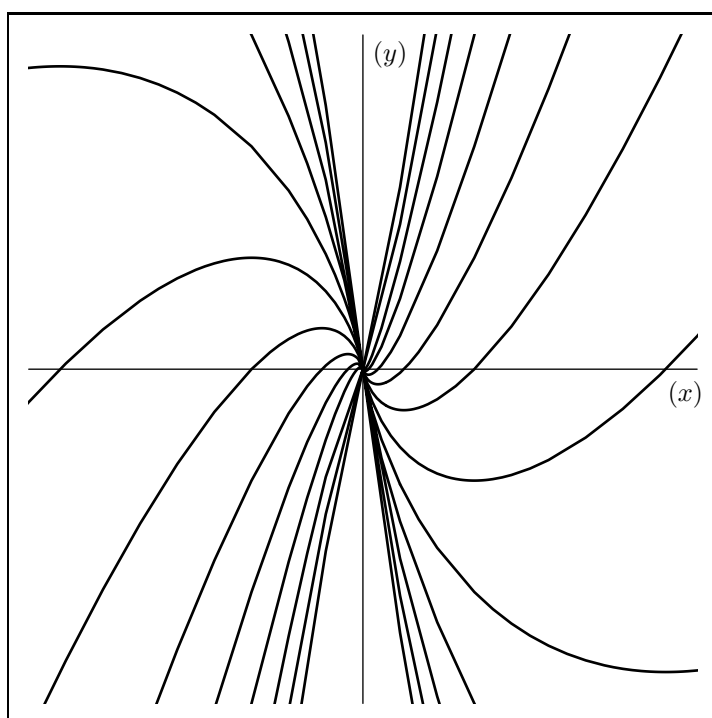


FIG. 2:
Phasenporträt für einen doppelten Eigenwert (Beispiel unter Punkt 3). Für positives Vorzeichen laufen die Trajektorien vom Nullpunkt weg, für negatives Vorzeichen laufen sie in den Nullpunkt hinein.

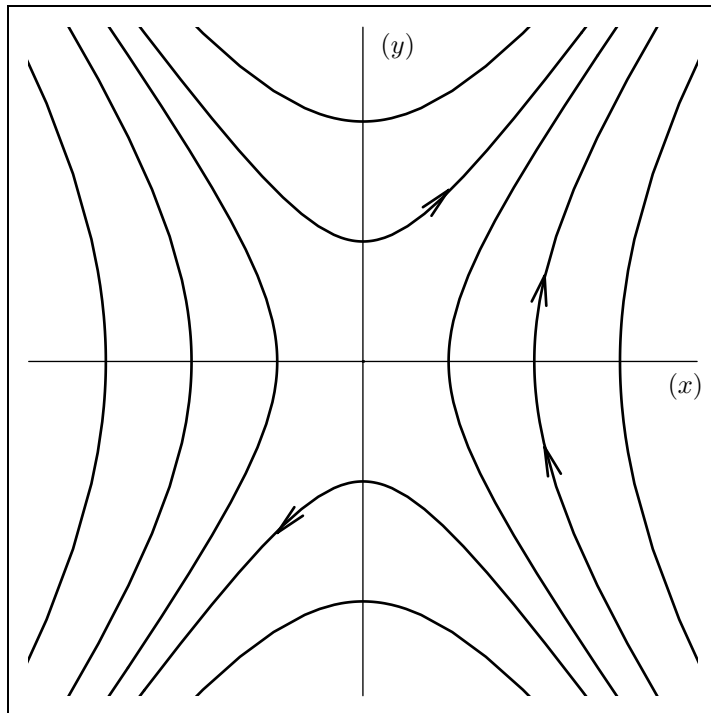


FIG. 3:
Phasenporträt für Eigenwerte
mit verschiedenen Vorzeichen
(Beispiel unter Punkt 2).

4. α_1, α_2 konjugiert komplex.

Dieser Fall spaltet in drei Unterfälle auf.

4.1. α_1, α_2 konjugiert komplex, rein imaginär, $\alpha_1 = ib, \alpha_2 = -ib$.

Die Funktionen x_1 und x_2 sind in diesem Fall harmonische Schwingungen mit Kreisfrequenz b

$$C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt) .$$

Dies führt im Phasenporträt zu periodisch durchlaufenen Trajektorien “um den Gleichgewichtspunkt herum”. Insbesondere sind die Trajektorien beschränkt. Der Gleichgewichtspunkt ist *stabil* (aber nicht asymptotisch stabil).

Beispiel Der ungedämpfte harmonische Oszillator liefert ein Beispiel für diesen Fall:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\omega^2 x_1 \end{vmatrix} .$$

Das Phasenporträt zeigt Ellipsen um den Ursprung herum, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden (siehe Figur 4).

4.2. α_1, α_2 konjugiert komplex mit positivem Realteil, $\alpha_1 = a + ib, \alpha_2 = a - ib, a > 0$.

Die Funktionen x_1 und x_2 haben die Form

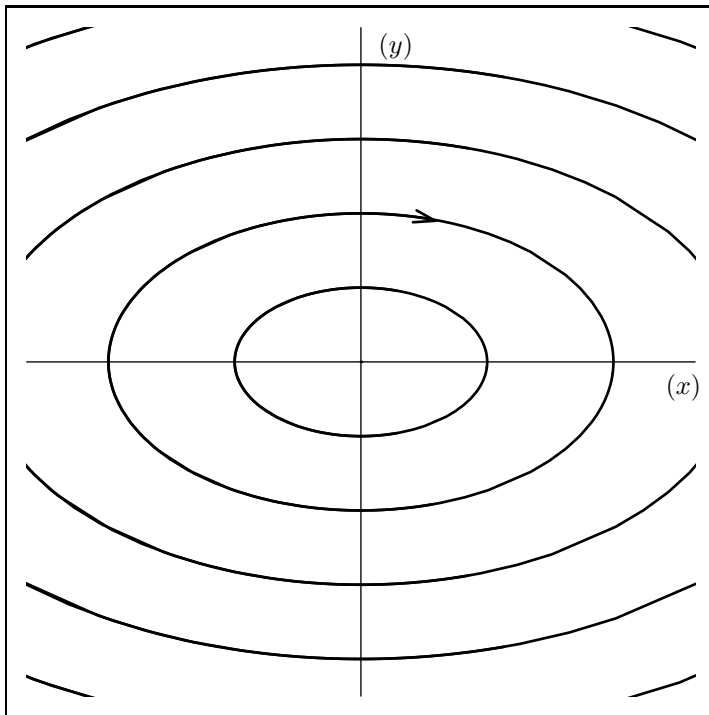


FIG. 4:
Phasenporträt für rein
imaginäre Eigenwerte
(Beispiel unter Punkt 4.1).

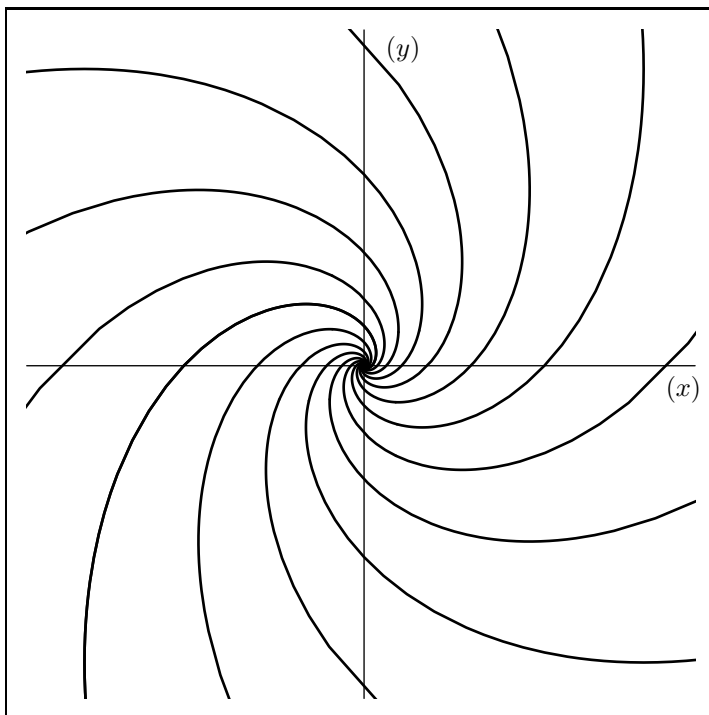


FIG. 5:
Phasenporträt für komplexe
Eigenwerte mit nichttrivialem
Realteil. Ist der Realteil positiv
(siehe Punkt 4.2) so laufen die
Trajektorien vom Nullpunkt
weg, ist der Realteil negativ
(siehe Punkt 4.3) so laufen die
Trajektorien in den Nullpunkt
hinein.

$$e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) , \quad a > 0.$$

Dies führt zu Exponentialspiralen als Trajektorien, die wegen $a > 0$ nach aussen, vom Nullpunkt weg durchlaufen werden. Der Gleichgewichtspunkt ist *instabil* (“instabiler Strudelpunkt”).

Beispiel

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & = & x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + x_2 \end{vmatrix} .$$

Die Eigenwerte sind $\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 1 - i$.

4.3. α_1, α_2 konjugiert komplex mit negativem Realteil, $\alpha_1 = a + ib$, $\alpha_2 = a - ib$, $a < 0$.
Die Funktionen x_1 und x_2 haben die Form

$$e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) , \quad a < 0 .$$

Dies führt im Phasenporträt zu Exponentialspiralen, die nach innen durchlaufen werden. Der Gleichgewichtspunkt ist *asymptotisch stabil* (“stabiler Strudelpunkt”).

Beispiel Der schwach gedämpfte harmonische Oszillator, $\lambda < \omega$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\omega^2 x_1 - 2\lambda x_2 \end{vmatrix}$$

liefert ein Beispiel für diesen Fall. Das Phasenporträt zeigt im Ursprung einen stabilen Strudelpunkt.

Die Fälle, wo einer oder beide der Eigenwerte α_1, α_2 Null sind, heissen ausgeartet und spielen eine kleinere Rolle. Natürlich können sie aber in diesem Zusammenhang ebenfalls diskutiert werden. Wir überlassen die Details dem Leser.