

4 Separierbare Differentialgleichungen

Es sollte aus der bisherigen Diskussion über konkrete Beispiele bereits klar geworden sein, dass beim Lösen von Differentialgleichungen *nicht* fest vorgeschriebene Methoden im Vordergrund stehen. Vielmehr kommt dem geschickten Vorgehen eine grosse Bedeutung zu. Man vergleiche dazu etwa den Lösungsgang im Beispiel (c) Abschnitt 2, wo durch eine Substitution die gegebene Differentialgleichung auf eine einfachere zurückgeführt wird. Ferner muss hier betont werden, dass viele, auch einfach aussehende Differentialgleichungen *nicht* elementar lösbar sind; dies bedeutet (wie bei den unbestimmten Integralen), dass die Lösungsfunktion, obschon sie natürlich nach unserem Satz 3.1 existiert, *nicht* durch elementare Funktionen ausdrückbar ist. Als Beispiel erwähnen wir die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$, deren Richtungsfeld wir in Abschnitt 3 aufgezeichnet haben; sie ist – wie man zeigen kann – *nicht* elementar lösbar. Man ist in diesen Fällen auf andere Verfahren, zum Beispiel auf Verfahren der numerischen Mathematik angewiesen. – Im vorliegenden Abschnitt wollen wir die Klasse der *separierbaren* Differentialgleichungen besprechen. Deren Behandlung ist insofern leicht, als sich die Lösungsfunktionen ohne viel Mühe durch gewöhnliche Integrale beschreiben lassen. Ferner betrachten wir Differentialgleichungen, welche durch eine einfache Operation auf separierbare zurückgeführt werden können.

Hat die Differentialgleichung die Form

$$(4.1) \quad y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

so heisst sie **separierbar**. Diese Terminologie orientiert sich an der einfachen Tatsache, dass (5.1) in der Form

$$(4.2) \quad h(y) \cdot y' = g(x)$$

geschrieben werden kann, in welcher die “Variablen x, y separiert” sind. Ist $y : x \rightarrow y(x)$ eine Lösungsfunktion von (5.2) so gilt, identisch in x

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x) .$$

Integration nach x liefert

$$\int h(y(x)) y'(x) dx = \int g(x) dx + C$$

und die Substitution $y(x) = y$, $y' dx = dy$ schliesslich

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + C .$$

Löst man die so entstehende (gewöhnliche) Gleichung nach y auf, so erhält man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.1) mit C als Parameter.

Der Leser mache sich an dieser Stelle klar, dass die Differentialgleichungen (2.1) und (2.4) separierbar sind und führe auf Grund dieser Tatsache die Lösung explizit durch.

Als weiteres **Beispiel** einer separierbaren Differentialgleichung betrachten wir das sogenannte “logistische Modell für Populationen”. Es handelt sich darum, ein mathematisches Modell für die Populationen in einem vorgegebenen Gebiet zu liefern, etwa für die Bevölkerungszahl eines Landes (oder die Rattenpopulation eines Biotops etc.). Wir bezeichnen die Bevölkerungszahl zur Zeit t mit $y(t)$. Im Zeitabschnitt Δt lässt sich diese Änderung beschreiben durch

$$(4.3) \quad y(t + \Delta t) - y(t) = (G - T + E - A) \Delta t ,$$

wobei die Grössen G , T , E , A der Reihe nach für die Anzahl Geburten, Todesfälle, Einwanderer, Auswanderer pro Zeiteinheit stehen. Natürlich können diese positiven Grössen im allgemeinen von t und y abhängig sein. Wir wollen im Folgenden der Einfachheit annehmen, dass $E = A$, so dass sich der Effekt der Einwanderung und der Auswanderung auf die Bevölkerungszahl aufhebt. Für die Grössen G und T wollen wir einfache Modellannahmen treffen. Wenden wir uns zunächst der Grösse T zu. Die einfachste Annahme besteht natürlich darin, dass die Anzahl Todesfälle T pro Zeiteinheit proportional zur Bevölkerungszahl $y(t)$ ist

$$(4.4) \quad T = a y(t) , \quad a > 0 .$$

Nun wird aber mit zunehmender Bevölkerungszahl etwa die Nahrungsbeschaffung immer schwieriger, der Stress des Individuums wird grösser, etc. , so dass die Annahme (5.4) in einem verfeinerten Modell durch einen entsprechenden Term korrigiert werden muss. Wir setzen

$$(4.5) \quad T = a y(t) + b y^2(t) , \quad a, b > 0 .$$

Dieser Ansatz erscheint vernünftig, da $y^2(t)$ ein Mass für die Anzahl der Zusammenstösse von Individuen pro Zeiteinheit ist. Analog macht man für G die Modellannahme

$$(4.6) \quad G = c y(t) - d y^2(t) , \quad c, d > 0 .$$

Die Geburtenzahl pro Zeiteinheit nimmt wegen der oben erwähnten Schwierigkeiten mit wachsendem $y(t)$ *unterproportional* zu.

Mit diesen Modellannahmen (5.5) und (5.6) erhalten wir die folgende Differentialgleichung für $t \rightarrow y(t)$

$$y'(t) = (c - a) y(t) - (b + d) y^2(t) .$$

Setzen wir $c - a = \alpha$, $b + d = \beta$, so folgt (siehe Figur 1)

$$(4.7) \quad y' = \alpha y - \beta y^2 .$$

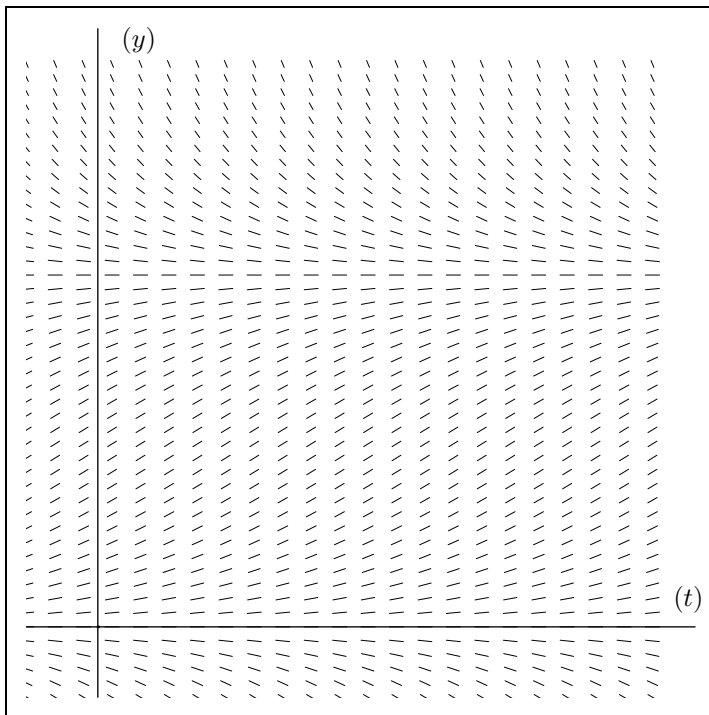


FIG. 1 :
Richtungsfeld der logistischen
Differentialgleichung

$$y' = \alpha y - \beta y^2$$

Die Gleichung ist offensichtlich separierbar. Wir erhalten

$$\int \frac{dy}{(\alpha - \beta y)y} = \int dt ,$$

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{\beta}{\alpha - \beta y} dy = \alpha \int dt ,$$

$$\log |y| - \log |\alpha - \beta y| = \alpha t + C ,$$

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} = A \cdot e^{-\alpha t} .$$

Dabei haben wir $A = \pm e^{-C}$ gesetzt. Auflösen nach y liefert nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.7)

$$(4.8) \quad y(t) = \frac{\alpha}{\beta + A \cdot e^{-\alpha t}}$$

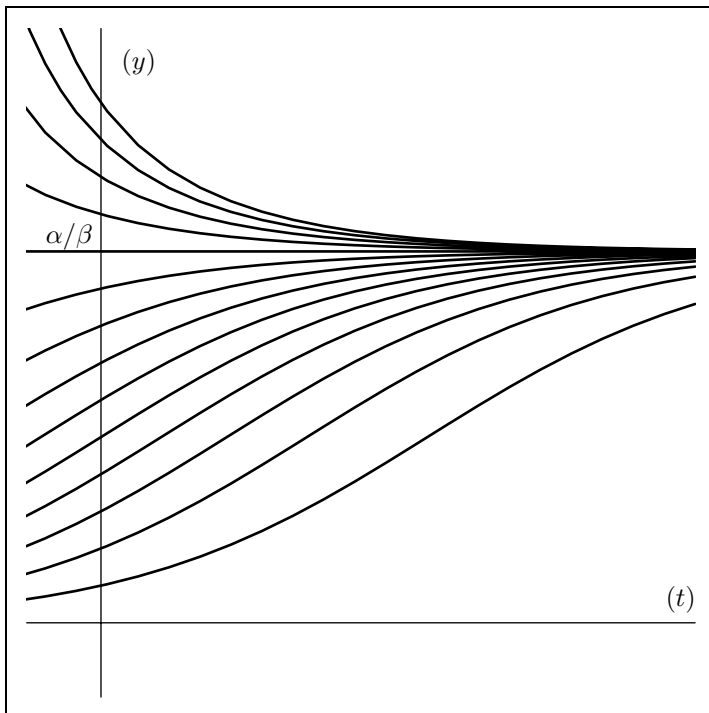


FIG. 2:
Lösungen der
Differentialgleichung

$$y' = \alpha y - \beta y^2$$

Für die Anfangsbevölkerungszahl $y(0) = y_0$ erhält man für den Parameterwert A

$$A = \frac{\alpha}{y_0} - \beta ,$$

so dass die zugehörige spezielle Lösung lautet

$$(4.9) \quad y(t) = \frac{\alpha}{\beta + \left(\frac{\alpha}{y_0} - \beta\right) e^{-\alpha t}} .$$

Die Figur 2 zeigt die Lösungskurven für verschiedene Werte von y_0 .

Man entnimmt der Formel (5.9) leicht die Tatsache, dass für grosse t der Wert von $y(t)$ gegen α/β strebt. Es gibt in diesem Modell eine stabile Bevölkerungszahl.

In vielen Fällen lassen sich Differentialgleichungen durch eine Substitution auf einfachere zurückführen. Wir lernen hier einige Typen von Differentialgleichungen kennen, die auf diese Weise auf separierbare zurückgeführt werden können.

In der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ sei die Funktion $f(x, y)$ von der Form $g(u)$, wo u eine lineare Funktion in x und y ist, $u = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Setzt man dann $u(x) = ax + by(x) + c$, so erhält man eine separierbare Differentialgleichung für $x \rightarrow u(x)$. Wir verfolgen den Lösungsweg an einem konkreten **Beispiel**.

$$(4.10) \quad y' = (2x + 3y)^2 .$$

Setze $u(x) = 2x + 3y(x)$, d.h. $y(x) = \frac{1}{3}(u(x) - 2x)$. Dann ergibt sich

$$y'(x) = \frac{1}{3}(u'(x) - 2) ,$$

und damit wird (5.10) zu

$$\frac{1}{3}(u' - 2) = u^2 ,$$

$$u' = 3u^2 + 2 .$$

Diese Differentialgleichung ist offensichtlich separierbar:

$$\int \frac{du}{2 + 3u^2} = \int dx ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{2}} u \right) = x + C .$$

Auflösung nach u liefert

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan \left(\sqrt{6}(x + C) \right) ,$$

und wegen $u(x) = 2x + 3y(x)$ erhält man schliesslich

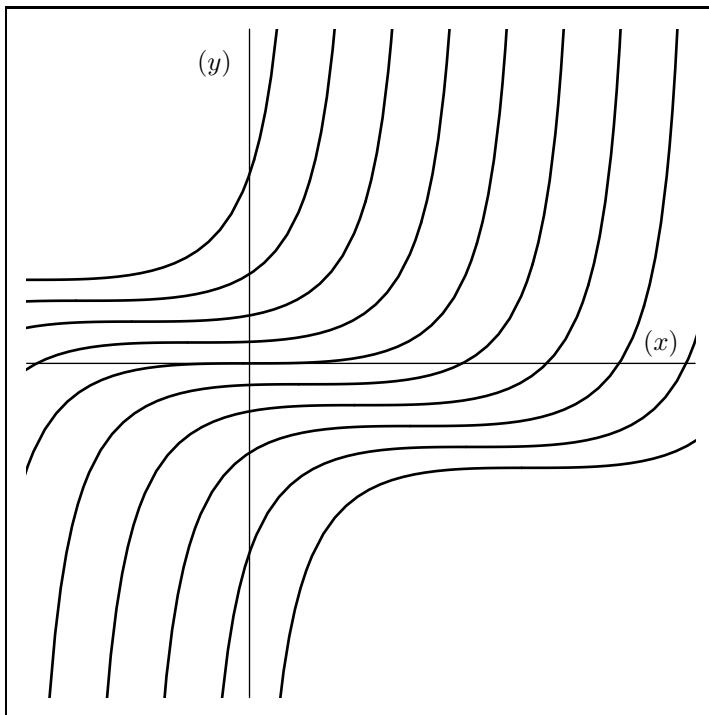


FIG. 3:
Lösungen der
Differentialgleichung

$$y' = (2x + 3y)^2$$

$$y = y(x) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \tan \left(\sqrt{6}(x + C) \right) - 2x \right) .$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.10) (siehe Figur 3).

Ähnliches gilt für Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$, wo $f(x, y)$ geschrieben werden kann als $g(u)$ mit $u = y/x$. Analog wie oben macht man die Substitution $u(x) = y(x)/x$ und erhält so eine separierbare Differentialgleichung für die Funktion $x \rightarrow u(x)$. Wieder erklären wir den Lösungsweg an einem konkreten **Beispiel**:

$$(4.11) \quad x y' = y - 2\sqrt{xy}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich in der Form

$$y' = \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

schreiben. Die rechte Seite ist eine Funktion von $u = y/x$. Die Substitution $u(x) = y(x)/x$ liefert $y(x) = x \cdot u(x)$ und damit

$$y'(x) = u(x) + x u'(x).$$

Einsetzen in (5.11) ergibt

$$u + x u' = u - 2\sqrt{u},$$

$$x u' = -2\sqrt{u}.$$

Letztere Differentialgleichung ist separierbar, so dass unser erstes Teilziel erreicht ist. Wir erhalten weiter

$$-\int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$-\sqrt{u} = \log|x| + C,$$

wobei, wie immer, der positive Wert der Wurzel zu nehmen ist, d.h. es ist $\log|x| + C \leq 0$. Mit $u = y/x$ folgt nach Quadrieren

$$\frac{y}{x} = (\log|x| + C)^2,$$

$$y = x (\log|x| + C)^2,$$

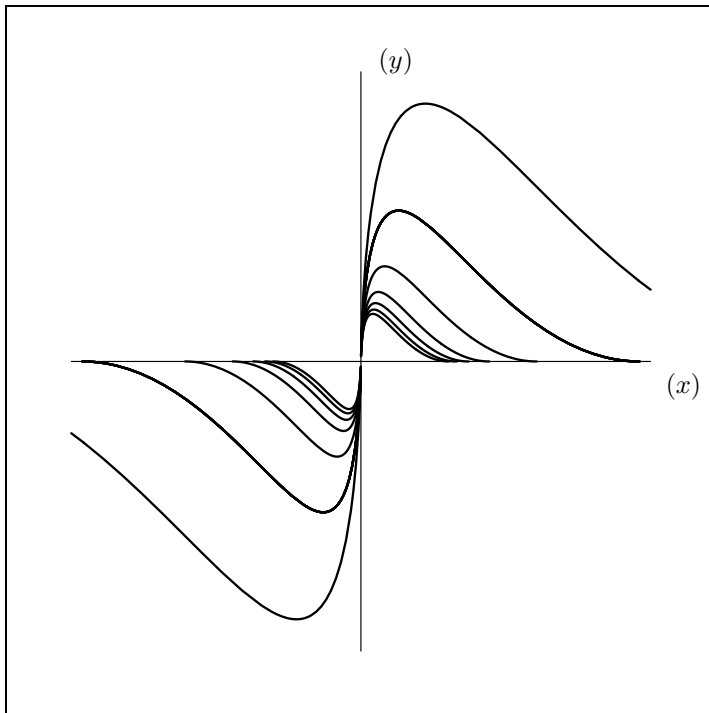


FIG. 4:
Lösungen der
Differentialgleichung

$$x y' = y - 2\sqrt{xy}$$

mit $\log |x| + C \leq 0$. Dies ist die allgemeine Lösung von (5.11) (siehe Figur 4).

Wir betrachten schliesslich in diesem Abschnitt noch das folgende Anwendungs**beispiel**. Wir stellen die Frage, wie ein zur y -Achse rotationssymmetrischer Spiegel geformt sein muss, damit alle parallel zur y -Achse einfallenden Strahlen in den Nullpunkt des Koordinatensystems reflektiert werden (siehe Figur 5).

Wegen der Rotationssymmetrie genügt es natürlich, die Schnittkurve des Spiegels mit der (x, y) -Ebene zu bestimmen, wobei wir uns sogar auf den Teil $x \geq 0$ beschränken können. Wir stellen diese Kurve als Graph einer Funktion $x \rightarrow y(x)$, $x \geq 0$ dar, und entnehmen der Figur die Beziehungen

$$\cot \alpha(x) = \tan \beta(x) = y' ,$$

$$\cot (2\alpha(x)) = \frac{y(x)}{x} .$$

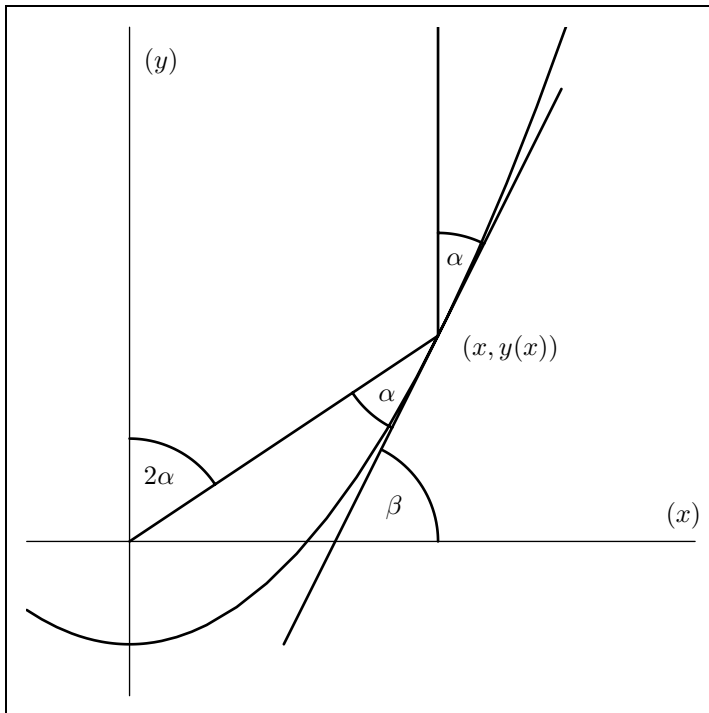


FIG. 5:
Reflexion in den Nullpunkt

Die bekannte trigonometrische Formel

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

liefert dann

$$(4.12) \quad \frac{y}{x} = \frac{y'^2 - 1}{2y'} ,$$

$$x y'^2 - 2y y' - x = 0 ,$$

$$(4.13) \quad y' = \frac{y^{(+)} \sqrt{y^2 + x^2}}{x} .$$

Da $y' > 0$ für $x > 0$, kann hier das negative Vorzeichen ausgeschlossen werden. Schreiben wir (5.13) in der Form

$$(4.14) \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1},$$

so ist offensichtlich, dass die rechte Seite eine Funktion von y/x ist. Die Substitution $u(x) = y(x)/x$ wird also eine separierbare Differentialgleichung für $x \rightarrow u(x)$ liefern. Wir erhalten wegen

$$y'(x) = u(x) + x u'(x)$$

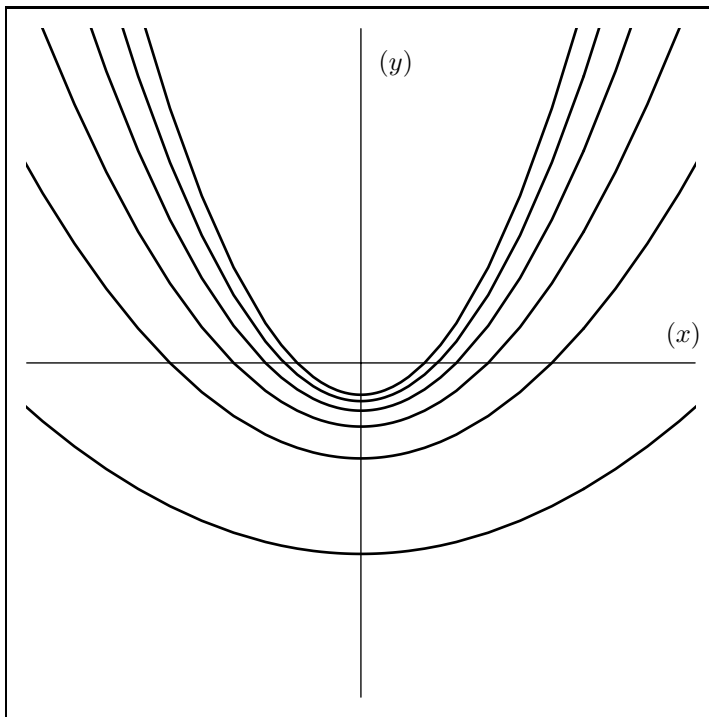


FIG. 6:
Parabolspiegel

die einfache Differentialgleichung

$$u + x u' = u + \sqrt{u^2 + 1},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\log \left(u + \sqrt{u^2 + 1} \right) = \log |x| + C .$$

Setzen wir $A = \pm e^C$, so folgt

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = Ax ,$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = A^2 x^2 - 2Ay + \frac{y^2}{x^2} ,$$

$$y = \frac{1}{2A} \left(A^2 x^2 - 1 \right) .$$

Die “Anfangsbedingung” $y_0 = y(x_0)$ bestimmt den Parameter A und damit die Öffnung des Spiegels (siehe Figur 6).