

## 11 Schwingungsprobleme

In diesem Abschnitt betrachten wir eine wichtige Anwendung der bis hierher entwickelten Theorie. Wir gehen dabei von zwei ganz verschiedenen konkreten Problemen aus und stellen fest, dass deren Verhalten durch ein und dieselbe lineare Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben wird. Diese Differentialgleichung diskutieren wir schliesslich im Detail.

Das erste der beiden Probleme ist die *gedämpfte Federschwingung*. Ein Massenpunkt der Masse  $m$  sei an einer idealen Feder aufgehängt (siehe Figur 1). Die Auslenkung zur Zeit  $t$  aus der Ruhelage werde durch  $x(t)$  beschrieben.

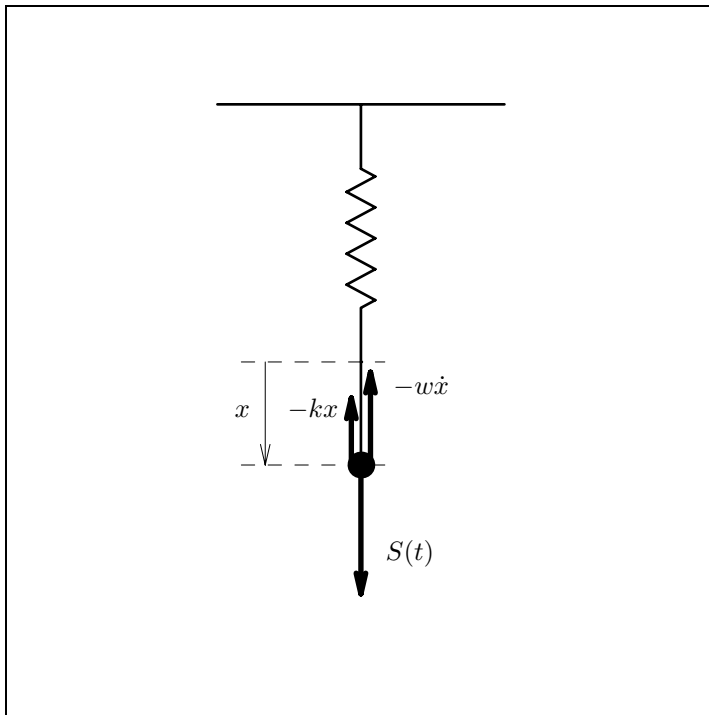


FIG. 1 :  
Gedämpfte Federschwingung

Auf den Massenpunkt wirke die *Federkraft*  $F = -kx$ , wobei  $k > 0$  eine Proportionalitätskonstante ist, und eine Dämpfungskraft  $W$ . Für  $W$  benützen wir die Modellvorstellung, dass  $W$  proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  sei,

$$W = -w\dot{x} , \quad w > 0 .$$

Ferner wirke auf  $m$  eine von  $t$  abhängige äussere Kraft  $S(t)$ . Das Newton'sche Gesetz liefert dann die Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx - w\dot{x} + S(t) .$$

Führen wir die Grössen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda = \frac{w}{2m}, \quad s(t) = \frac{S(t)}{m}$$

ein, so lautet die Differentialgleichung

$$(11.1) \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = s(t) .$$

Es handelt sich somit um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Als zweites konkretes Problem betrachten wir einen *elektrischen Stromkreis*, welcher eine Kapazität  $C$ , eine Induktivität  $L$  und einen Ohm'schen Widerstand  $R$  enthält (siehe Figur 2). Ausserdem werde an den Klemmen eine von  $t$  abhängige Spannung  $u(t)$  angelegt.

Gesucht ist der zur Zeit  $t$  im Stromkreis fliessende Strom  $I(t)$ . Aus der Physik weiss man, dass der Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand  $R$  durch  $u_R = RI$  gegeben ist, derjenige an der Induktivität durch  $u_L = L\frac{dI}{dt}$  und derjenige am Kondensator mit Kapazität  $C$  durch  $u_C = q/C$ , wo  $q$  die zur Zeit  $t$  auf  $C$  sitzende Ladung bezeichnet. Natürlich gilt  $I(t) = \dot{q}(t)$ . Das Kirchhoff'sche Gesetz liefert

$$u_R + u_L + u_C = u(t) .$$

Setzt man die obigen Werte ein, so erhält man

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q(t)}{C} = u(t)$$

und nach Ableitung nach  $t$

$$(11.2) \quad L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}u(t) .$$

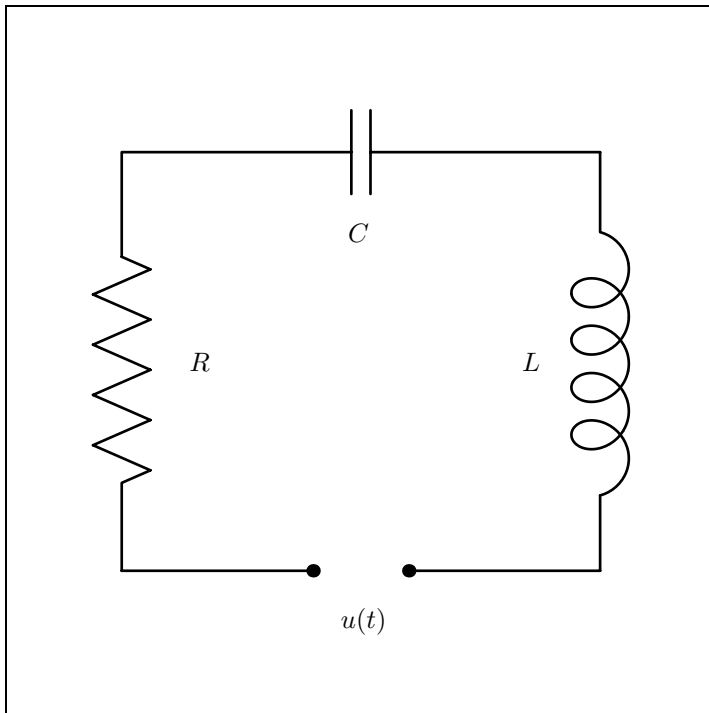


FIG. 2:  
Elektrischer Schwingkreis

Führt man die Größen

$$\omega^2 = \frac{1}{CL}, \quad \lambda = \frac{R}{2L}, \quad s(t) = \frac{1}{L} \frac{d}{dt} u(t), \quad I(t) = x(t),$$

ein, so geht (11.2) in die Differentialgleichung (11.1) über. Vom mathematischen Standpunkt aus genügt es deshalb, sich mit (11.1) zu befassen. Wir haben hier wiederum ein Beispiel vor uns, wo zwei ganz verschiedene konkrete Probleme auf ein und dasselbe mathematische Modell führen.

Im Folgenden diskutieren wir (11.1) und betrachten zu diesem Zweck zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$(11.3) \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\alpha \rightarrow \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2 ,$$

hat also die Nullstellen

$$(11.4) \quad \alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} .$$

Je nach der Lage dieser Nullstellen sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

**(a)**  $\lambda > \omega$ , sogenannte *starke Dämpfung*

In diesem Fall hat man zwei verschiedene *reelle* Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Die allgemeine Lösung von (11.3) lautet

$$(11.5) \quad x_h(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} .$$

Man beachte, dass beide Nullstellen *negativ* sind, so dass  $x_h(t)$  für jede Wahl von  $C_1, C_2$  exponentiell abklingt.

**(b)**  $\lambda = \omega$ , sogenannte *kritische Dämpfung*

Hier hat das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\lambda$ . Die allgemeine Lösung von (11.3) lautet

$$(11.6) \quad x_h(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t} .$$

Auch hier klingt  $x_h(t)$  für jede Wahl von  $C_1, C_2$  exponentiell ab.

**(c)**  $\lambda < \omega$ , sogenannte *schwache Dämpfung*

In diesem Fall hat das charakteristische Polynom zwei konjugiert komplexe Nullstellen. Setzt man  $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ , so gilt  $\alpha_{1,2} = -\lambda \pm i\omega^*$ . Die allgemeine Lösung von (11.3) lautet dann

$$(11.7) \quad x_h(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega^* t) + C_2 \sin(\omega^* t)) .$$

Jede spezielle Lösung von (11.3) ist in diesem Fall eine “exponentiell abklingende harmonische Schwingung” der Kreisfrequenz  $\omega^*$  (siehe Figur 3). Man beachte ferner, dass  $\omega^*$  kleiner ist als die Kreisfrequenz  $\omega$  der ungedämpften Schwingung ( $\lambda = 0$ ).

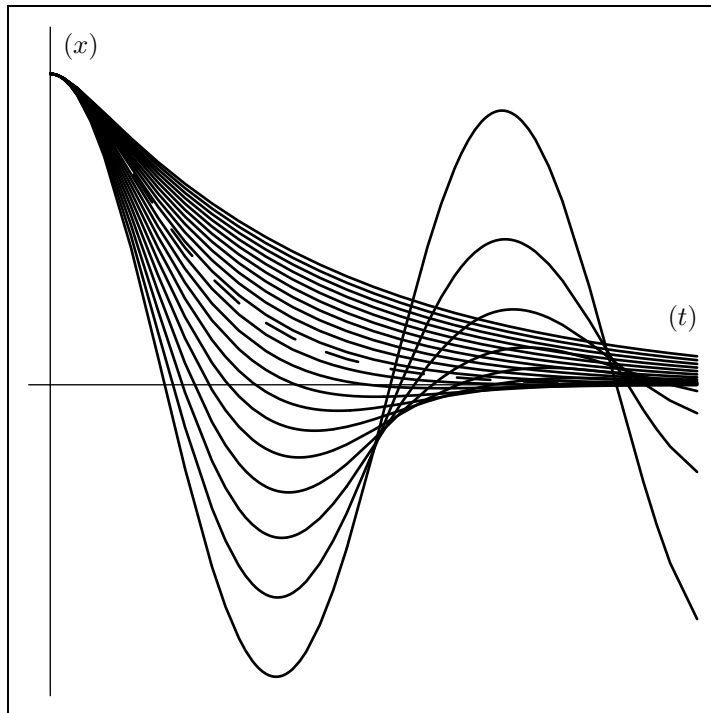


FIG. 3:  
 Die Lösung  $t \rightarrow x(t)$  mit  
 $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$  der  
 Schwingungsgleichung  
 $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = 0$   
 zu verschiedenen Werten von  $\lambda$ .  
 Die gestrichelte Kurve entspricht  
 der kritischen Dämpfung  $\lambda = \omega$

Als nächstes diskutieren wir die inhomogene Differentialgleichung (11.1), und zwar wollen wir den Fall betrachten, wo  $s(t)$  durch

$$s(t) = P \cos(\sigma t)$$

gegeben ist. Wir haben also die Differentialgleichung

$$(11.8) \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = P \cos(\sigma t)$$

vor uns. Nach der Theorie setzt sich die allgemeine Lösung von (11.8) additiv aus einer partikulären Lösung  $x_0(t)$  von (11.8) und der allgemeinen Lösung  $x_h(t)$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (11.3) zusammen:

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) .$$

Wir haben oben gesehen, dass in jedem Fall die Funktion  $x_h$  exponentiell abklingt; somit wird für grosse  $t$

$$x(t) \sim x_0(t)$$

gelten. Für  $x_0(t)$  können wir deshalb die sogenannte *stationäre* Lösung einsetzen, nämlich diejenige, die sich “nach langer Zeit” einstellt. Die Erfahrung (des Physikers mit Stromkreisen, etc.) zeigt, dass dies eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\sigma$  der Anregung sein wird. Wir machen deshalb für  $x_0$  den Ansatz (übrigens in Übereinstimmung mit unserer Faustregel)

$$(11.9) \quad x_0(t) = A \cos(\sigma t + \alpha) .$$

Die noch unbekannte Amplitude  $A$  und die Phasenverschiebung  $\alpha$  werden durch Einsetzen in (11.8) gewonnen. Wir erhalten (nach längerer Rechnung)

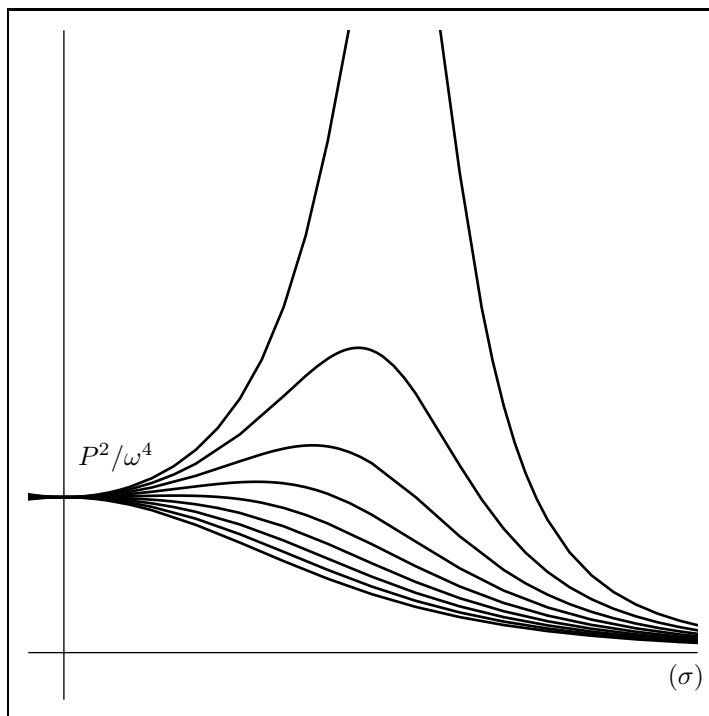
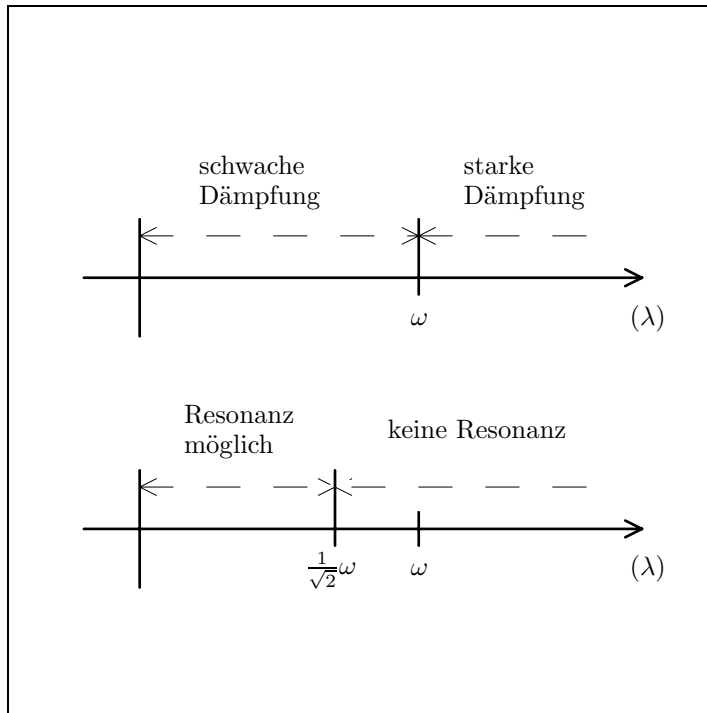


FIG. 4:  
Das Verhalten der Funktion  
 $\sigma \rightarrow A^2(\sigma)$  für verschiedene  
Werte von  $\lambda$

$$\begin{cases} \tan \alpha &= \frac{2\lambda\sigma}{\sigma^2 - \omega^2} , \\ A^2 &= \frac{P^2}{4\lambda^2\sigma^2 + (\sigma^2 - \omega^2)^2} . \end{cases}$$


 FIG. 5:  
Dämpfung und Resonanz

Wir diskutieren hier die (zwar ebenfalls interessante und wichtige) Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\alpha$  von  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$  nicht weiter, sondern konzentrieren uns auf die Amplitude  $A$ , und untersuchen zu diesem Zweck den Graphen der Funktion  $\sigma \rightarrow A^2(\sigma)$  (siehe Figur 4).

Um die Stellen mit horizontaler Tangente zu berechnen, setzen wir

$$\frac{d}{d\sigma} A^2(\sigma) = -P^2 \frac{8\lambda^2\sigma + 2(\sigma^2 - \omega^2)2\sigma}{(4\lambda^2\sigma^2 + (\sigma^2 - \omega^2)^2)^2} = 0.$$

Dies führt auf  $\sigma_1 = 0$  und wegen  $2\lambda^2 + (\sigma_2^2 - \omega^2) = 0$  auf

$$(11.10) \quad \sigma_2^2 = \omega^2 - 2\lambda^2.$$

Das Verhalten von  $A^2(\sigma)$  ist somit stark abhängig von den Größen  $\omega$ ,  $\lambda$ . Wir erhalten die folgenden, qualitativ unterschiedlichen Fälle (siehe Figur 5).

**(a) Starke Dämpfung und kritische Dämpfung,  $\omega \leq \lambda$**

In diesem Fall hat man nur eine horizontale Tangente; die Funktion  $\sigma \rightarrow A^2(\sigma)$  nimmt mit zunehmendem  $\sigma$  monoton ab.

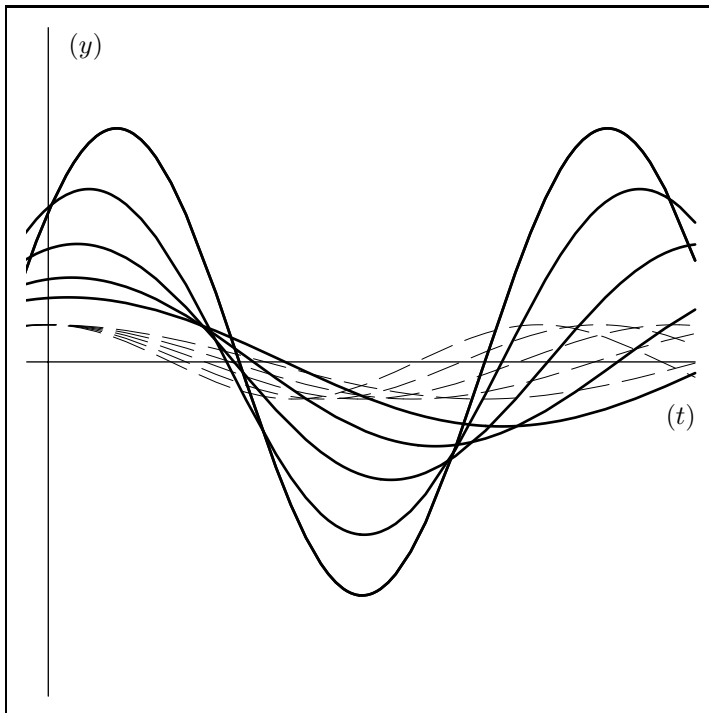


FIG. 6:  
Die Funktionen  $t \rightarrow P \cos(\sigma t)$   
(gestrichelt) und die  
zugehörigen stationären  
Lösungen (ausgezogen) der  
Differentialgleichung  
 $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = P \cos(\sigma t)$   
mit schwacher Dämpfung zu  
verschiedenen Werten  
von  $\sigma$  mit  $\sigma \leq \sigma_2$ .

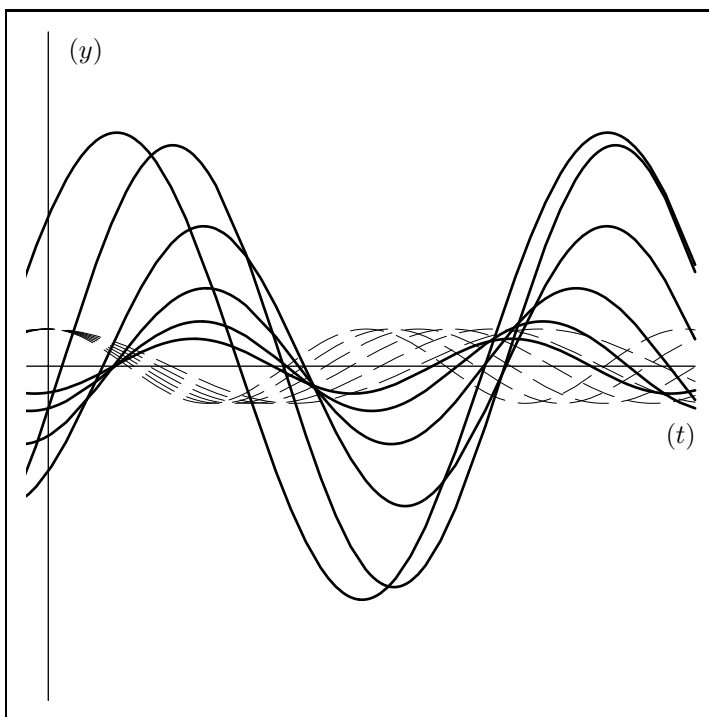


FIG. 7:  
Die Funktionen  $t \rightarrow P \cos(\sigma t)$   
(gestrichelt) und die  
zugehörigen stationären  
Lösungen (ausgezogen) der  
Differentialgleichung  
 $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = P \cos(\sigma t)$   
mit schwacher Dämpfung zu  
verschiedenen Werten  
von  $\sigma$  mit  $\sigma \geq \sigma_2$ .



(b) *Schwache Dämpfung*,  $\lambda < \omega$

Hier sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden

(ba)  $\frac{1}{\sqrt{2}}\omega \leq \lambda < \omega$

In diesem Fall ist  $\omega^2 - 2\lambda^2 \leq 0$ . Man erhält für  $\sigma = 0$  eine horizontale Tangente. Für  $\sigma > 0$  ist die Funktion  $\sigma \rightarrow A^2(\sigma)$  strikt monoton fallend.

(bb)  $0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega$

In diesem Fall ist  $\omega^2 - 2\lambda^2 > 0$  und man hat *zwei* horizontale Tangenten, nämlich bei  $\sigma_1 = 0$  und bei  $\sigma_2 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$ . In  $\sigma_2$  nimmt  $A^2(\sigma)$  offenbar das Maximum an. Die Frequenz  $\sigma_2$  heisst *Resonanzfrequenz*. Sie ist kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega$ . Jenseits der Resonanzfrequenz nimmt  $A^2(\sigma)$  monoton ab (siehe Figuren 6,7).

**Bemerkung** Für  $\lambda = 0$  (keine Dämpfung) hat man ein ähnliches Verhalten. Alle Herleitungen bleiben für  $\sigma \neq \omega$  gültig. Der Fall  $\sigma = \omega$  muss genauer untersucht werden, denn an dieser Stelle hat die Funktion  $\sigma \rightarrow A^2(\sigma)$  einen Pol. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P \cos(\omega t)$$

hat auch eine etwas anders geartete *partikuläre* Lösung. Es gilt (siehe (9.26))

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{P}{2\omega} t \sin(\omega t) .$$

Die Schwingungsgleichung, wie wir sie in (11.1) vor uns haben, gibt uns noch zu einigen allgemeinen Bemerkungen Anlass. Wir haben bereits gesehen, dass der homogene Anteil der Differentialgleichung (11.1) das System an sich beschreibt und das inhomogene Glied die “äussere Anregung” (es heisst deshalb ja auch treffend “Störglied”). In unserem Modell wird das System durch eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Der Leser hat sich vielleicht bereits gefragt, ob damit die reale Situation nicht allzu vereinfacht dargestellt wird. Zu dieser Frage wollen wir hier noch einige Worte sagen. Gehen wir zurück zur konkreten Situation eines Massenpunktes, welcher sich längs einer Gerade bewegt und auf den Kräfte wirken, welche von der Lage  $x(t)$  und von der Geschwindigkeit  $\dot{x}(t)$  des Massenpunktes abhängen. Die Totalkraft  $K$  ist dann also durch eine Funktion von  $x$  und  $\dot{x}$  gegeben. Das Newton’sche Gesetz liefert

$$(11.11) \quad m\ddot{x} = K(x, \dot{x}) .$$

Wir denken uns ferner ein Koordinatensystem so eingeführt, dass  $x = 0$  der Ruhelage des Massenpunktes entspricht. Dies hat die Konsequenz, dass  $K(0, 0) = 0$ . Im allgemeinen ist  $K$  eine schwer zu beschreibende, komplizierte Funktion, und man wird sich in konkreten Fällen immer mit Approximationen zufrieden geben müssen. Als *einfachste* solche Approximation drängt sich die *lineare Ersatzfunktion* auf:

$$(11.12) \quad K(x, \dot{x}) \sim K(0, 0) + xK_x(0, 0) + \dot{x}K_{\dot{x}}(0, 0) .$$

Diese ist bekanntlich in der Umgebung des Nullpunktes eine “gute” Approximation. Ersetzt man in der Differentialgleichung (11.11) die komplizierte Funktion  $K$  durch die lineare Ersatzfunktion (11.12) und beachtet man zusätzlich  $K(0, 0) = 0$ , so erhält man mit  $a = K_x(0, 0)$ ,  $b = K_{\dot{x}}(0, 0)$  die Differentialgleichung

$$(11.13) \quad m\ddot{x} = ax + b\dot{x} .$$

Dies entspricht gerade unserer homogenen Schwingungsdifferentialgleichung. Jetzt ist es nicht mehr überraschend, dass die Differentialgleichung linear ist und dass  $a, b$  Konstanten sind: wir haben uns eben mit Absicht auf diesen einfachen Fall beschränkt. Es bleibt natürlich die Frage offen, wie gut die Lösungen der vereinfachten Differentialgleichung (11.13) die Lösungen der “richtigen” Differentialgleichung (11.11) wiedergeben. Diese Frage führt auf diffizile und sehr interessante mathematische Probleme, auf die wir hier nicht eingehen. Immerhin wollen wir folgendes festhalten. Wir wissen bereits, dass die Approximation von  $K$  durch die lineare Ersatzfunktion umso besser ist, je kleiner  $x$  und  $\dot{x}$  sind. Es ist deshalb plausibel und es kann auch mathematisch bewiesen werden, dass die Lösungen der vereinfachten Differentialgleichung (11.13) die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung (11.11) umso besser wiedergeben, je kleiner  $x$  und  $\dot{x}$  sind. Die Folgerung, die der Anwender daraus ziehen muss, ist diese: Die Differentialgleichung (11.1) beschreibt zwar eine *ideale* gedämpfte Federschwingung eines Massenpunktes; *die Differentialgleichung “gilt” aber für in einer Dimension schwingende Massenpunkte ganz allgemein, wenn nur die Auslenkung aus der Ruhelage und die Geschwindigkeit des Massenpunktes klein bleiben.*

**Beispiel** Um das eben Gesagte an einer bekannten Situation zu illustrieren, betrachten wir noch kurz das mathematische Pendel. Ein Massenpunkt der Masse  $m$  sei an einer gewichtslosen Faden der Länge  $l$  aufgehängt.

Wir beschreiben die Lage des Massenpunktes mit Hilfe des Winkels  $\varphi$ . Dann gilt in der (einzig interessanten) Tangentialrichtung nach dem Newton’schen Gesetz

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi .$$

Für die Funktion  $t \rightarrow \varphi(t)$  erhalten wir die Differentialgleichung

$$(11.14) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi .$$

Wir vereinfachen nun gemäss dem oben Gesagtem die rechte Seite dieser Gleichung, indem wir  $\varphi \rightarrow f(\varphi) = \sin \varphi$  ersetzen durch die lineare Ersatzfunktion bezüglich  $\varphi = 0$ . (Man beachte, dass  $\varphi = 0$  die Ruhelage beschreibt). Die lineare Ersatzfunktion ist gegeben durch

$$\varphi \rightarrow f(0) + f'(0)\varphi = \sin(0) + \cos(0)\varphi = \varphi .$$

Damit erhalten wir statt der “komplizierten” Differentialgleichung (11.14) die “einfache” lineare Differentialgleichung

$$(11.15) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi ,$$

die üblicherweise als *Differentialgleichung des mathematischen Pendels* bekannt ist.

Wir schliessen diesen Abschnitt über Schwingungsprobleme mit einigen **Beispielen**, die alle aus dem Tätigkeitsbereich von Ingenieuren stammen.

## Empfang von Radiowellen

Im ersten Beispiel geht es um eine positive Anwendung des Resonanzphänomens und zwar um den Empfang von Radiowellen. Die verschiedenen Übertragungsfrequenzen der Sender führen am Empfangsort zu einem wirren Gemisch von Radiowellen, welches einer Überlagerung von harmonischen Schwingungen der elektrischen Feldstärke mit verschiedenen Frequenzen entspricht. Das Empfangsgerät hat die Aufgabe, aus diesem ganzen Spektrum, nur das Signal in der Frequenz des gewünschten Senders aufzunehmen und es anschliessend zu verstärken. Dieses Aus-sortieren geschieht mit Hilfe von Resonanz. Im wesentlichen benützt man dafür einen Stromkreis der oben betrachteten Art, der in Serie eine Kapazität, einen Ohm’schen Widerstand und eine Induktivität enthält. An die Klemmen wird die Antennenspannung angelegt. Diese variiert gemäss der Überlagerung aller einstrahlender Radiowellen. Man sorgt nun dafür, dass der Stromkreis schwach gedämpft ist – mit schmaler Resonanzkurve – und dass die Resonanzfrequenz gerade mit der Frequenz des gewünschten Senders übereinstimmt. Jeder Frequenzanteil des empfangenen Totalsignals erzeugt im Stromkreis einen entsprechenden Anteil des Gesamtstromes. Gemäss unseren Resultaten wird dabei die Resonanzfrequenz “bevorzugt” behandelt. Dies führt bei schmaler Resonanzkurve dazu, dass der Anteil des Stromes, der auf das Signal dieser Frequenz zurückzuführen ist, weit grösser ist als die von den anderen Frequenzen herrührenden

Anteile. Das zur Resonanzfrequenz gehörende Signal ist damit gegenüber den Signalen der anderen Sender hervorgehoben worden. Es wird anschliessend mit Hilfe von Radioröhren oder Transistoren verstärkt.

## Turnhalle

Das zweite Beispiel zeigt, dass Resonanzphänomene auch bei Bauwerken eine grosse Rolle spielen können. Dies ist deshalb etwas überraschend, weil Bauwerke im Normalfall nur auf die statische Beanspruchung ausgelegt werden. Möglicherweise auftretende dynamischen Effekte werden oft gar nicht berücksichtigt. – Es handelt sich um eine Turnhalle, die vor nicht allzu langer Zeit in der Umgebung von Zürich gebaut worden ist. Der folgende Abschnitt stammt aus dem Sanierungsbericht von Professor H. Bachmann von der Abteilung für Bauingenieurwesen an der ETH-Zürich.

“Bei einer doppelstöckigen Turnhalle traten bald nach der Inbetriebnahme starke Bauwerkschwingungen auf. Diese wurden dann beobachtet, wenn in der oberen Halle zu rhythmischer Musik moderne Konditionstrainings, das heisst Lauf-, Hüpf- und Sprungübungen durchgeführt wurden. Die Schwingungen äusserten sich insbesondere in der unteren Halle durch sichtbare Durchbiegungen der Zwischendecke, durch horizontale Fassadenbewegungen und durch einen erheblichen Lärm. Dieser wurde hervorgerufen durch das Mitschwingen und Klappern der Eingangstüre und des Tores zum Geräteraum, sowie von an Decke, Fassaden und Wänden befestigten Ausstattungsteilen und Turngeräten. Ferner konnte bei geöffneter Eingangstüre ein starker rhythmischer Luftzug in Folge Kompression und Dekompression des Hallenvolumens verspürt werden. Diese Wirkungen führten dazu, dass immer wieder Personen die untere Halle verliessen, sobald in der oberen Halle Konditionstrainings durchgeführt wurden.”

Zum Zwecke der Sanierung wurden an der Turnhalle Messungen durchgeführt, die zeigten, dass bei der Schwingung der Zwischendecke Beschleunigungen bis zur Hälfte der Erdbeschleunigung auftraten. Man hat ferner auch eine Rissaufnahme an den Trägern der Zwischendecke durchgeführt, und Risse festgestellt, die mehr als einen halben Millimeter Breite aufweisen.

Der Grund für die Schwingungen ist ein Resonanzphänomen. Berechnungen zeigten, dass die Zwischendecke ein schwach gedämpftes, schwingungsfähiges System bildete, das durch das Hüpfen, Laufen und Springen der Turnenden in periodischer Weise angeregt wurde. Es ist nach unserer Theorie klar, dass in diesem System Resonanz auftreten wird, wenn die Hüpf Frequenz mit der Resonanzfrequenz übereinstimmt. Das wusste natürlich auch der Bauingenieur, der diese Turnhalle gebaut hatte. Die Sachlage war hier aber etwas komplizierter. Es zeigte sich, dass die Resonanzfrequenz der Zwischendecke bei ungefähr 4.8 Hz lag, während bei Lauf- oder Hüpfübungen Frequenzen von 2.4 bis 2.5 Hz auftreten. Der Bauingenieur hatte gelernt, dass bei Anregungsfrequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz keine Resonanz auftreten kann und er fühlte sich deshalb sicher. Die Sache ist nun aber die, dass diese Aussage nur für *rein harmonische Anregungskräfte* gilt. Die durch das Hüpfen oder Laufen von Turnenden auf den Zwischenboden ausgeübte Kraft ist aber nicht rein harmonisch, sondern besteht annäherungsweise aus periodisch auftretenden rechteckförmigen Stössen. Um Aussagen über das Resonanzverhalten zu machen, muss man diese Anregungskraft in eine Überlagerung von harmonischen Anteilen

zerlegen. Das geschieht mit Hilfe der Fourier-Zerlegung. In dieser Zerlegung treten automatisch auch harmonische Anteile der doppelten Anregungsfrequenz, der dreifachen, usw. auf. Es ist natürlich die doppelte Anregungsfrequenz, die hier mit der Resonanzfrequenz der Zwischendecke übereinstimmte und zu den unangenehmen Erscheinungen führte.

Die Turnhalle wurde saniert, indem die Zwischendecke versteift wurde. Damit erreichte man eine höhere Eigenfrequenz (zirka 8 Hz). Resonanzschwingungen waren damit zwar nicht völlig ausgeschlossen, aber ihre Auswirkungen lagen innerhalb der zulässigen Grenzen.

## Webereigebäude

Resonanzerscheinungen spielen bei Maschinen mit rotierenden und oszillierenden Teilen oft eine wichtige und unangenehme Rolle. Wir erwähnen hier den Fall eines Webereigebäudes<sup>1</sup>.

“Im unterkellerten Maschinensaal eines rund 20 Jahre alten Webereigebäudes traten nach einer Umrüstung auf moderne, schneller laufende Maschinen starke Schwingungen auf. Bei eingehenden Messungen wurden an der die Maschinen tragenden Decke vertikale Schwinggeschwindigkeiten von bis zu 24 mm/s festgestellt [als Normwert gilt 10 mm/s!]. Auch die Maschinenschwingungen waren mit einer Schwingbreite (zweifache Amplitude) in horizontaler Richtung von 1.2 mm beträchtlich. Als zulässig wurde im vorliegenden Fall rund 1 mm erachtet. Höhere Werte wären zwar für die Maschinen gefahrlos gewesen, hingegen konnten sich bei feinen Geweben textiltechnische Probleme ergeben, da der Schusseintrag beeinträchtigt wurde.”

Der Grund für die Bauwerksschwingungen war eine Resonanzerscheinung. Messungen ergaben als Grundfrequenz der Betondecke rund 21 Hz. “Die *vor* der Umrüstung vorhandenen Webmaschinen hatten Drehzahlen von rund 200 U/min, d.h. sie liefen mit rund 3.3 Hz. Die neuen Maschinen liefen, je nach zu fabrizierendem Gewebe, mit 240 bis 290 U/min, d.h. mit bis zu rund 4.8 Hz. Es war somit offensichtlich, dass die Deckenschwingungen vor allem durch obere Harmonische (4., 5.) des nicht näher bekannten zeitlichen Verlaufs der Last hervorgerufen wurden” [d.h. durch diejenigen harmonischen Anteile in der Fourier-Zerlegung der anregenden Schwingung, welche die vier bzw. fünffache Frequenz der Grundfrequenz aufweisen].

“Eine [sogenannte] Tiefabstimmung, d.h. eine Lagerung der Maschinen auf weichen Feder-(Dämpfer-)Elementen, kam nicht in Frage. Wohl wären dadurch die Deckenschwingungen vermindert worden, doch hätten sich noch stärkere Maschinenschwingungen ergeben, was aus textiltechnischen Gründen nicht zulässig war. Deshalb wurde eine Deckenverstärkung [...] vorgenommen.” Das Ziel dieser Massnahme war, die Grundfrequenz der Decke soweit zu erhöhen, dass Resonanzerscheinungen in nur noch geringem Masse auftreten konnten.

“Die Sanierungsmassnahmen waren erfolgreich. Wie erneute Messungen zeigten, wurde [...] der Richtwert der Schwinggeschwindigkeit von 10 mm/s praktisch nicht mehr überschritten. Die Maschinenschwingungen waren ebenfalls erheblich kleiner als vor der Sanierung, und es traten somit keine produktionstechnischen Probleme mehr auf.”

---

<sup>1</sup>siehe H. Bachmann, W. Ammann: Schwingungsprobleme bei Bauwerken, 1987