

6 Niveaulinien, exakte Differentialgleichungen, Orthogonaltrajektorien

In diesem und dem nächsten Abschnitt wollen wir uns mit einigen geometrischen Problemen auseinandersetzen, welche mit Kurvenscharen zu tun haben.

Wir betrachten zunächst eine Funktion $g : (x, y) \rightarrow g(x, y)$ von zwei Variablen. Den Verlauf dieser Funktion veranschaulichen wir uns durch ihre Niveaulinien, welche durch die Gleichung

$$(6.1) \quad g(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

gegeben sind. Wir fragen jetzt nach der Differentialgleichung, welche die Kurvenschar (7.1) beschreibt. Totale Ableitung von (7.1) nach x liefert

$$(6.2) \quad g_x(x, y) + g_y(x, y) y' = 0.$$

Da der Scharparameter C automatisch eliminiert worden ist, ist (7.2) bereits die Differentialgleichung der Schar. Die Lösungskurven von (7.2) sind die Niveaulinien der Funktion g .

Wir schliessen daran einige Bemerkungen an. Schreiben wir (7.2) in der Form

$$(6.3) \quad y' = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} =: f(x, y)$$

und wenden wir darauf unseren Satz (3.1) über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen an, so erhalten wir folgendes. Durch einen Punkt (x_0, y_0) geht genau *eine* Lösungskurve von (7.3), also eine Niveaulinie von g , wenn f in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig partiell differenzierbar ist. Für die Funktion g selbst bedeutet letzteres, neben der offensichtlichen Bedingung $g_y(x, y) \neq 0$, dass g in einer Umgebung von (x_0, y_0) *zweimal* stetig partiell differenzierbar ist.

Beispiel Betrachte die Funktion $g : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$ und ihre Niveaulinien (siehe Figur 1).

Satz 3.1 liefert uns genau eine Niveaulinie durch jeden Punkt der (x, y) -Ebene mit Ausnahme der Punkte auf der x -Achse; denn dort verschwindet die partielle Ableitung von g nach y . (Die

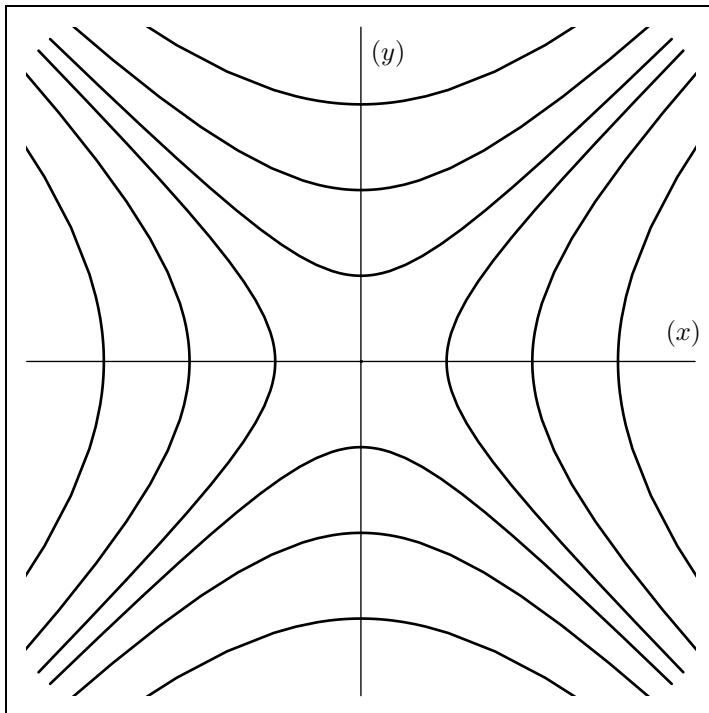


FIG. 1:
Niveaulinien der Funktion
 $(x, y) \rightarrow g(x, y) = x^2 - y^2$

Zeichnung lässt allerdings vermuten, dass sich die Niveaulinien in diese Punkte stetig fortsetzen lassen. Dies kann man in der Tat mathematisch einwandfrei nachweisen, indem man ein um $\pi/2$ gedrehtes Koordinatensystem einführt. Der Nullpunkt bildet dabei eine Ausnahme!)

Umgekehrt gehen wir von einer Differentialgleichung der Form

$$(6.4) \quad \varphi(x, y) + \psi(x, y) y' = 0$$

aus und fragen, unter welchen Bedingungen sie als eine Differentialgleichung der Form (7.2) interpretiert werden kann. Wann gibt es eine Funktion $g: (x, y) \rightarrow g(x, y)$ mit

$$\varphi(x, y) \equiv g_x(x, y) \quad , \quad \psi(x, y) \equiv g_y(x, y) \quad ?$$

Wir haben dieses Problem bereits früher, nämlich in Kapitel IV, Abschnitt 7 studiert und gesehen, dass $g: (x, y) \rightarrow g(x, y)$ jedenfalls nur dann existieren kann, wenn die *Integrabilitätsbedingung*

$$(6.5) \quad \varphi_y(x, y) \equiv \psi_x(x, y)$$

erfüllt ist. Ferner haben wir festgestellt, dass in diesem Fall g auch tatsächlich existiert, wenn man sich auf ein achsenparalleles Rechteck als Definitionsbereich beschränkt. Da wir unter diesen Vorgaben g berechnen können, ist damit auch die Differentialgleichung (7.4) gelöst: die Lösungskurven sind die Niveaulinien von g .

Eine Differentialgleichung (7.4), welche die Bedingung (7.5) erfüllt, heisst **exakt**. Ihre Lösungskurven sind die Niveaulinien der Funktion $g: (x, y) \rightarrow g(x, y)$.

Beispiel Bestimme die durch den Punkt $(1, 2)$ gehende Lösungskurve von

$$(6.6) \quad (2x^2 - y^2 + y) - (2xy - x + 4y) y' = 0 .$$

Ein Vergleich mit (7.4) zeigt, dass wir

$$(6.7) \quad \varphi(x, y) = 2x^2 - y^2 + y, \quad \psi(x, y) = -2xy + x - 4y$$

setzen müssen. Dann gilt

$$\varphi_y(x, y) = -2y + 1 = \psi_x(x, y) .$$

Die Differentialgleichung (7.6) ist folglich exakt. Die Funktion $g(x, y)$ ergibt sich schrittweise. Wegen

$$g_x(x, y) = \varphi(x, y) = 2x^2 - y^2 + y$$

erhalten wir

$$g(x, y) = \frac{2}{3} x^3 - xy^2 + xy + u(y)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion $y \rightarrow u(y)$. Ableitung nach y liefert

$$-2xy + x - 4y = \psi(x, y) \stackrel{!}{=} g_y(x, y) = -2xy + x + u'(y) .$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} u'(y) &= -4y, \\ u(y) &= -2y^2. \end{aligned}$$

Die Funktion $g: (x, y) \rightarrow g(x, y)$ ist also gegeben durch

$$(6.8) \quad g(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2.$$

(Natürlich ist g nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7.6) ist die Schar der Niveaulinien von g (siehe Figur 2):

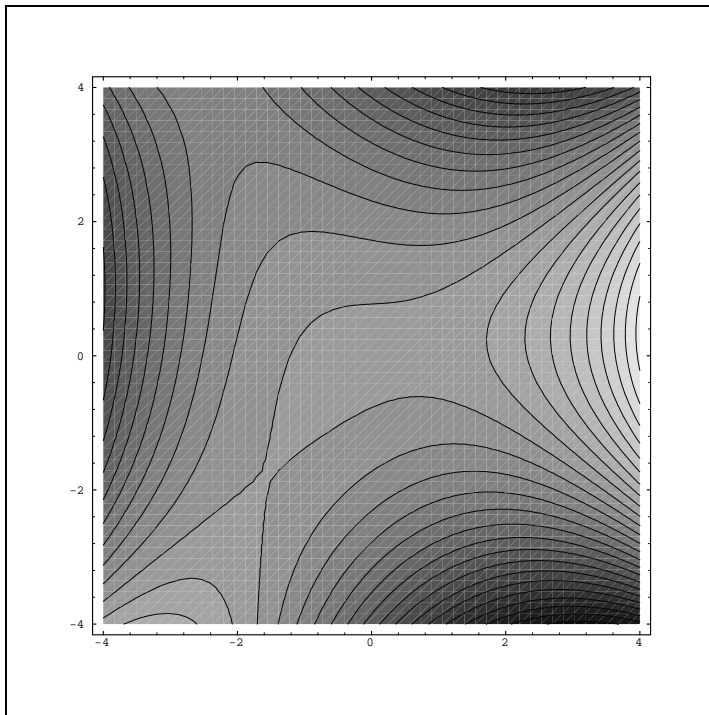


FIG. 2:
Niveaulinien der Funktion

$$(x, y) \rightarrow \frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2$$

$$(6.9) \quad \frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2 = C.$$

Den zur gesuchten speziellen Lösung gehörigen Wert von C erhalten wir durch Einsetzen des Punktes $(1, 2)$ in (7.9). Es ergibt sich $C = -28/3$, so dass die Lösung gegeben ist durch

$$(6.10) \quad \frac{2}{3}x^3 - xy^2 + xy - 2y^2 = -28/3 .$$

Wir gehen zurück zur Gleichung (7.1), welche die Niveaulinien der Funktion $g: (x, y) \rightarrow g(x, y)$ beschreibt. Betrachten wir g als (ebenes) Potential, so hat bekanntlich das zugehörige Gradientenfeld die Eigenschaft, dass der Vektor des Feldes im Punkt P senkrecht auf der Niveaulinie durch P steht.

Die *Feldlinien* des Gradientenfeldes verlaufen somit in jedem Punkt senkrecht zu den Niveaulinien von g . Die Feldlinien bilden die **Orthogonaltrajektorien** zur Schar der Niveaulinien.

Etwas allgemeiner kann man nach den Orthogonaltrajektorien einer (regulären) Schar von Kurven fragen. Jede solche reguläre Schar ist Lösungsschar einer Differentialgleichung

$$(6.11) \quad y' = f(x, y) .$$

Die Steigung in (x, y) der durch (x, y) gehenden Orthogonaltrajektorie ist dann offensichtlich

$$m = -\frac{1}{f(x, y)} .$$

Beschreiben wir die Orthogonaltrajektorie wieder als Graph einer Funktion $y: x \rightarrow y(x)$, so muss dafür die Differentialgleichung

$$(6.12) \quad y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

erfüllt sein. Die Orthogonaltrajektorien sind somit gerade die Lösungskurven der Differentialgleichung (7.12), wenn die ursprüngliche Schar durch die Differentialgleichung (7.11) beschrieben wird.

Beispiel Es sei die Schar der Parabeln

$$(6.13) \quad y = Cx^2$$

gegeben, und es seien die Orthogonaltrajektorien dieser Schar gesucht. Die Differentialgleichung der Schar (7.13) erhalten wir durch Ableiten nach x und Elimination des Parameters. Wir erhalten

$$(6.14) \quad y' = 2Cx .$$

Aus (7.13) ergibt sich

$$C = \frac{y}{x^2} .$$

Einsetzen in (7.14) liefert

$$y' = 2 \frac{y}{x} =: f(x, y) .$$

Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet nach (7.12)

$$(6.15) \quad y' = -\frac{x}{2y} .$$

Diese ist separierbar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int y \, dy &= - \int \frac{1}{2} x \, dx , \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{4} + C . \end{aligned}$$

Die Orthogonaltrajektorien der Schar (7.13) sind somit gegeben durch

$$(6.16) \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C .$$

Es sind Ellipsen mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems (siehe Figur 3).

Natürlich bilden umgekehrt die durch (7.13) gegebenen Kurven die Orthogonaltrajektorien zur Schar (7.16).

Beispiel In einem zweiten Beispiel sei die Schar der Kreise gegeben, welche die x -Achse im Ursprung berühren. Gesucht ist die Schar der Orthogonaltrajektorien.

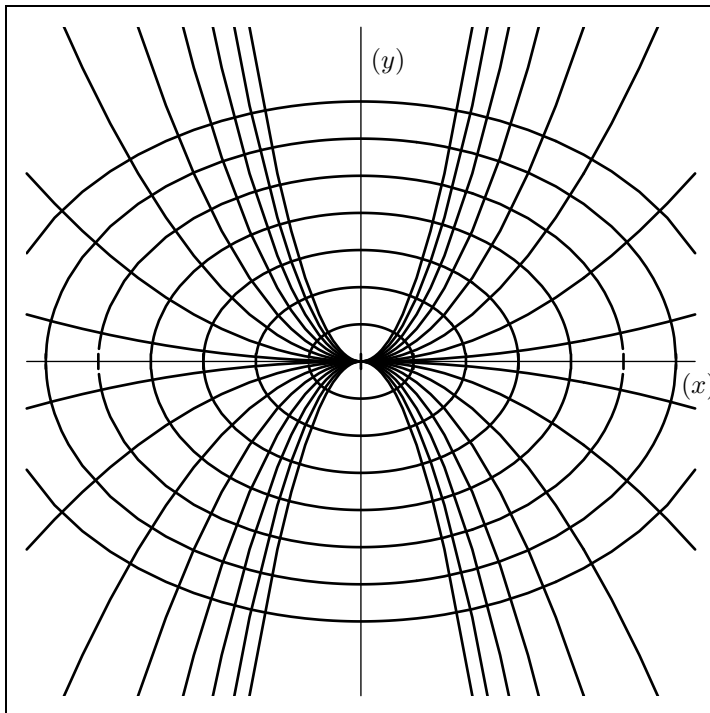


FIG. 3:
Die Orthogonaltrajektorien
der Schar der Parabeln
 $y = Cx^2$ sind Ellipsen

Die Schargleichung der Kreise lautet offensichtlich

$$(6.17) \quad x^2 + y^2 - Cy = 0 .$$

Die Differentialgleichung ergibt sich durch totale Ableitung nach x und Elimination von C . Wir erhalten

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} .$$

Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet nach (7.12)

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \\ y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}} \right) . \end{aligned}$$

Wie üblich machen wir die Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, d.h.

$$u'x + u = y'.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} xu' &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^2 + 1}{u} \right), \\ \int \frac{2u}{u^2 + 1} du &= -\int \frac{1}{x} dx, \\ \log |u^2 + 1| &= -\log |x| + C. \end{aligned}$$

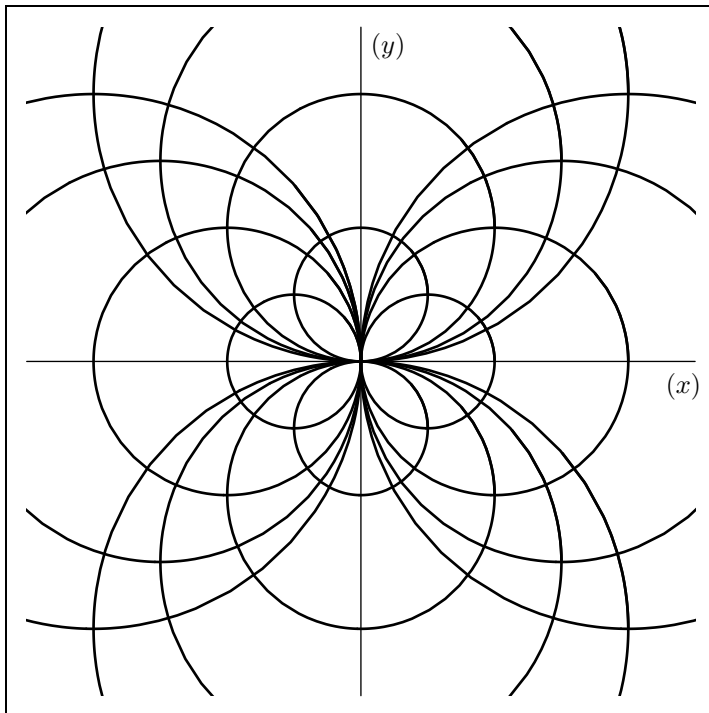


FIG. 4:
Die Orthogonaltrajektorien
der Schar der Kreise

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

sind die Kreise

$$x^2 - Ax + y^2 = 0$$

Setzen wir $A = \pm e^C$, so folgt nach Rücksubstitution

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{A}{x},$$

$$(6.18) \quad x^2 - Ax + y^2 = 0 .$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also wiederum Kreise, nämlich solche, welche die y -Achse im Ursprung berühren (siehe Figur 4).