

9 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Die bei weitem wichtigste Klasse von Differentialgleichungen höherer Ordnung wird von den linearen gebildet. Mit diesen werden wir uns in den Abschnitten 9, 10, 11 beschäftigen.

Die Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$(9.1) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt **linear**, wenn die Funktion f bezüglich der Variablen $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ linear ist. Die Gleichung (10.1) lässt sich in diesem Fall in der Form

$$(9.2) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_0(x) y = q(x)$$

schreiben. Man beachte, dass über die hier auftretenden Funktionen $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0, q$ *keine* zusätzlichen Voraussetzungen getroffen werden; es sind beliebige stetige Funktionen. Für $n = 1$ ist (10.2) eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Ähnlich wie in Abschnitt 5 führen wir die folgende Ausdrucksweise ein. Die Differentialgleichung (10.2) heißt **homogen**, wenn $q(x) \equiv 0$ gilt, andernfalls heißt sie **inhomogen**. In diesem Fall heißt $q(x)$ das **inhomogene Glied** oder **Störglied**. Die Differentialgleichung

$$(9.3) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_0(x) y = 0$$

heißt die **zu (10.2) gehörige homogene Differentialgleichung**.

Im Folgenden wollen wir uns mit den Lösungen der homogenen Differentialgleichung (10.3) beschäftigen und mit dem Zusammenhang zwischen den Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (10.2) und denjenigen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Die Resultate sind analog zu den Resultaten für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung, die wir in Abschnitt 5 behandelt haben.

(a) Homogene lineare Differentialgleichungen

Wir beginnen mit dem folgenden

Satz 9.1 *Es seien $x \rightarrow y_1(x)$, $x \rightarrow y_2(x)$, \dots , $x \rightarrow y_k(x)$ Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (10.3). Dann ist für jede Wahl von $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ die Funktion*

$$(9.4) \quad x \rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (10.3).

Der Beweis ergibt sich sofort durch Einsetzen. Man mache sich klar, dass die im Satz ausgesprochene Eigenschaft der Lösungen für *nicht* lineare und auch für *inhomogene* lineare Differentialgleichungen *nicht* erfüllt ist. In der Tat ist sie für homogene lineare Differentialgleichungen charakteristisch.

In der linearen Algebra nennt man die durch (10.4) gegebene Funktion $x \rightarrow y(x)$ eine (reelle) Linearkombination der Funktionen y_1, y_2, \dots, y_k . Der Satz 9.1 lässt sich also in Kurzform wie folgt aussprechen:

Für eine homogene lineare Differentialgleichung ist jede Linearkombination von Lösungen wiederum eine Lösung.

Beispiel Es sei die offensichtlich lineare homogene Differentialgleichung

$$(9.5) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

gegeben. Man verifiziert leicht, dass die durch $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$ gegebene Funktionen Lösungen sind. Nach Satz 9.1 ist dann jede Funktion der Form

$$(9.6) \quad x \rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

wiederum eine Lösung. Sucht man die spezielle Lösung, welche zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ gehört, so erhält man wegen

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} C_1 & = & 1 \\ -C_1 + C_2 & = & 2 \end{vmatrix}.$$

Die gesuchte spezielle Lösung ergibt sich also zu

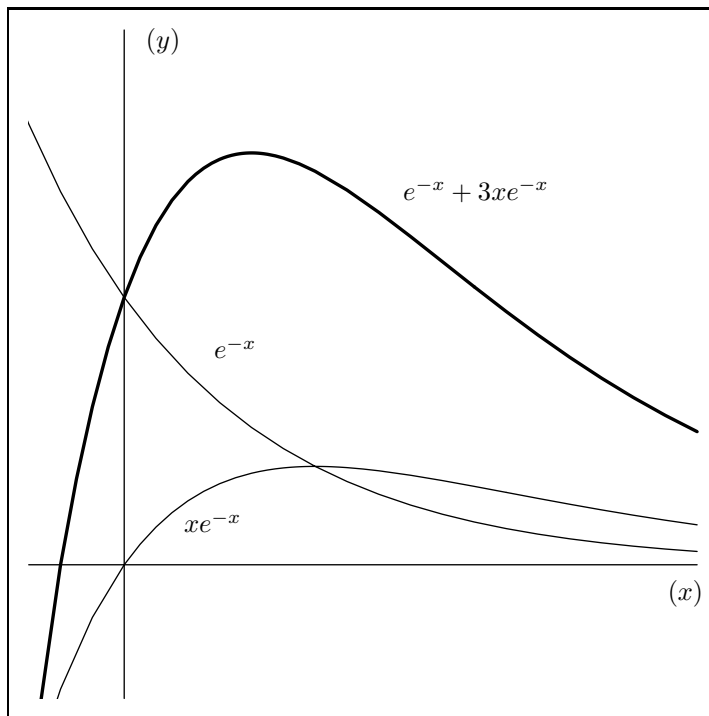


FIG. 1:
Die spezielle Lösung $x \rightarrow y(x)$
der Differentialgleichung
 $y'' + 2y' + y = 0$ mit $y(0) = 1$
und $y'(0) = 2$ als
Linearkombination der
Funktionen $y_1(x) = e^{-x}$ und
 $y_2(x) = xe^{-x}$

$$y(x) = e^{-x} + 3xe^{-x}.$$

(siehe Figur 1). Man überzeugt sich leicht, dass sich durch (10.6) *jede* Anfangsbedingung der Form $y(x_0) = y_0^{(0)}$, $y'(x_0) = y_0^{(1)}$ auf eindeutige Art befriedigen lässt. Es handelt sich also bei (10.6) um die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung (10.5). Dies illustriert unseren Satz 9.2. Um ihn zu formulieren erinnern wir an die folgende, aus der linearen Algebra stammende Sprechweise. Die Funktionen $x \rightarrow y_1(x)$, $x \rightarrow y_2(x), \dots, x \rightarrow y_k(x)$ heissen *linear unabhängig*, wenn aus

$$(9.7) \quad \sum_{i=1}^k C_i y_i(x) \equiv 0 \quad , \quad C_i \in \mathbb{R}$$

stets folgt $C_i = 0$ für $i = 1, 2, \dots, k$, d.h. wenn sich die Nullfunktion nur in trivialer Weise als Linearkombination darstellen lässt.

Satz 9.2 *Es seien $x \rightarrow y_1(x)$, $x \rightarrow y_2(x), \dots, x \rightarrow y_n(x)$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (10.3). Dann ist die n -parametrische Schar*

$$(9.8) \quad y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad C_i \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10.3).

Beweis Es ist zu zeigen, dass durch geeignete Wahl der Konstanten C_1, C_2, \dots, C_n jede Anfangsbedingung der Form

$$(9.9) \quad y(x_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

erfüllt werden kann. Dazu benötigen wir etwas lineare Algebra, sowie unseren Satz 8.1. Die Bedingung (10.9) liefert für C_1, C_2, \dots, C_n das Gleichungssystem

$$(9.10) \quad \begin{array}{cccccc} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + \dots + & C_n y_n(x_0) & = & y_0^{(0)} \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + \dots + & C_n y_n'(x_0) & = & y_0^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \dots + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{(n-1)} \end{array}.$$

Aus der linearen Algebra weiss man, dass das inhomogene Gleichungssystem (10.10) genau dann für beliebige $y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$ eine Lösung besitzt, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ zulässt. Das zu (10.10) gehörige homogene Gleichungssystem wird offensichtlich einfach dadurch erhalten, dass man die Anfangsbedingung

$$(9.11) \quad y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

studiert. Wir müssen also zeigen, dass diese Anfangsbedingung *nur* durch die triviale Wahl $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ erfüllt wird.

Da nach der Eindeutigkeitsaussage in unserem Satz 8.1 die Lösung durch die Anfangsbedingung eindeutig bestimmt wird, sehen wir, dass die Nullfunktion $y(x) \equiv 0$, die Lösung von (10.3) ist,

welche die Anfangsbedingung (9.11) erfüllt. Die Konstanten C_1, C_2, \dots, C_n müssen somit so gewählt werden, dass

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \equiv 0$$

gilt. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n folgt dann mit (9.7) in der Tat $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$. Dies war zu beweisen.

Beispiel Es sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = 0$$

gegeben. Diese ist linear mit $p_1(x) = x/(1-x)$ und $p_0(x) = -1/(1-x)$ und ausserdem homogen. Man verifiziert leicht, dass die Funktionen $x \rightarrow y_1(x) = x$, $x \rightarrow y_2(x) = e^x$ Lösungen sind. Nach Satz 9.1 ist somit jede Linearkombination

$$(9.12) \quad x \rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

wiederum eine Lösung. Da y_1 und y_2 linear unabhängig sind (warum?), folgt aus Satz 9.2, dass die durch (9.12) gegebene Kurvenschar die allgemeine Lösung ist.

Zum Abschluss dieses Textabschnittes muss hier noch folgendes gesagt werden. Im Fall von homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung lässt sich die allgemeine Lösung bekanntlich auf einfache Art durch Separieren erhalten (siehe Abschnitt 5). Dies ist bei homogenen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung anders. Auch wenn unser Satz 9.2 die Form der allgemeinen Lösung angibt, so lassen sich doch die linear unabhängigen Lösungsfunktionen in vielen konkreten Fällen nicht elementar beschreiben. Es lässt sich zum Beispiel zeigen, dass die allgemeine Lösung der einfachen Differentialgleichung $y'' + xy = 0$ nicht in elementarer Form dargestellt werden kann. Hier, wie an so vielen Stellen der Theorie der Differentialgleichungen ist man auf andere Verfahren angewiesen, insbesondere auf solche numerischer Art. Im Abschnitt 10 werden wir allerdings zwei wichtige Klassen von höheren linearen Differentialgleichungen kennen lernen, bei denen sich die allgemeine Lösung explizit hinschreiben lässt. Unser Satz 9.2 wird dabei eine wichtige Rolle spielen. Hier, im Rest dieses vorliegenden Abschnittes wollen wir uns noch mit dem Fall der inhomogenen linearen Differentialgleichungen auseinandersetzen.

(b) Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Im Abschnitt 5 haben wir gesehen, dass sich die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung als Superposition einer partikulären Lösung der inhomogenen

Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung darstellen lässt. Die zu diesem Resultat führenden Behauptungen A und B im Abschnitt 5 gelten offensichtlich auch für inhomogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Dies stellt man sofort fest, indem man den Beweis der Behauptungen A und B auf diesen Fall überträgt. Damit gilt auch hier:

Man erhält die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (10.2) indem man eine partikuläre Lösung $y_0 : x \rightarrow y_0(x)$ nimmt und zu ihr die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (10.3) addiert.

Ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (10.3) bekannt, so ist die Aufgabe auf das Problem reduziert, *eine* partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10.2) zu bestimmen. Oft lässt sich diese partikuläre Lösung auf einfache Weise durch einen geschickt gewählten Ansatz finden. Wie im Falle von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung versuche man zuerst immer einen Ansatz in der Form des Störgliedes.

Beispiel Die Differentialgleichung

$$(9.13) \quad y'' + 2y' + y = \sin(3x)$$

sei gegeben. Gesucht ist die Lösung, welche die Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$ befriedigt. Nach (10.6) hat die zugehörige homogene Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$x \rightarrow C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung von (10.13) zu erhalten, machen wir den *Ansatz*

$$y_0 : x \rightarrow A \cos(3x) + B \sin(3x),$$

also eine harmonische Schwingung derselben Kreisfrequenz wie das Störglied. Einsetzen in (10.13) liefert für die Grössen A, B das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} -8A + 6B = 0 \\ -6A - 8B = 1 \end{vmatrix}.$$

Daraus erhält man $A = -\frac{3}{50}$, $B = -\frac{2}{25}$. Die Funktion

$$y_0 : x \rightarrow -\frac{3}{50} \cos(3x) - \frac{2}{25} \sin(3x)$$

ist somit Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10.13). Die allgemeine Lösung lautet demzufolge

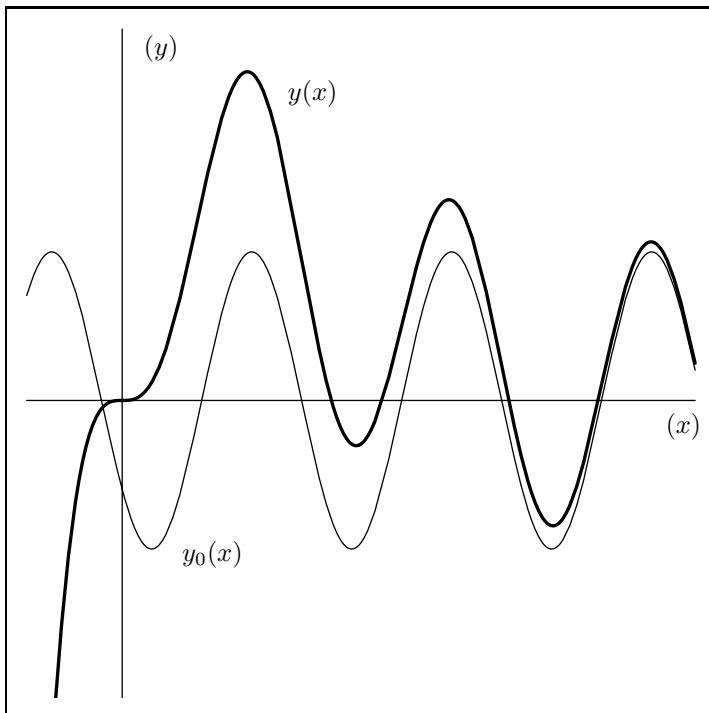


FIG. 2:
Die partikuläre Lösung

$$y_0(x) = -\frac{3}{50} \cos(3x) - \frac{2}{25} \sin(3x)$$

der Differentialgleichung
 $y'' + 2y' + y = \sin(3x)$ und die
 spezielle Lösung $x \rightarrow y(x)$ mit
 $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$

$$y : x \rightarrow C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{3}{50} \cos(3x) - \frac{2}{25} \sin(3x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen – diese kommt erst jetzt zum Zug – bestimmen schliesslich die Konstanten C_1, C_2 ; man erhält $C_1 = \frac{3}{50}$, $C_2 = \frac{3}{10}$. Die gesuchte spezielle Lösung lautet somit (siehe Figur 2)

$$(9.14) \quad y : x \rightarrow \frac{3}{50} e^{-x} + \frac{3}{10} x e^{-x} - \frac{3}{50} \cos(3x) - \frac{2}{25} \sin(3x).$$

Nicht immer lässt sich allerdings eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10.2) durch einen einfachen Ansatz gewinnen. Zum Beispiel führt unsere Faustregel bei der einfachen Differentialgleichung

$$(9.15) \quad y'' + \omega^2 y = P \cos(\omega x)$$

nicht zum Ziel, denn jede harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω ist ja eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. In solchen Fällen muss das kompliziertere **Verfahren von Lagrange** (J. L. Lagrange 1736 - 1813) angewendet werden. Wir erklären dieses im Falle von inhomogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Analoges gilt für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Es sei die Differentialgleichung

$$(9.16) \quad y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

gegeben. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sei

$$x \rightarrow C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (10.16) zu erhalten, macht man im Verfahren von Lagrange den Ansatz

$$(9.17) \quad y_0(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen γ_1, γ_2 . Man beachte, dass sich jede beliebige Funktion in der Form (10.17) schreiben lässt. Der Ansatz in dieser Form ist deshalb günstig, weil er erlaubt, die Funktionen γ_1, γ_2 , zu bestimmen, und zwar sogar dann – und das ist der Witz des Ansatzes – wenn wir die zusätzliche Annahme

$$(9.18) \quad \gamma_1'(x) y_1(x) + \gamma_2'(x) y_2(x) \equiv 0$$

treffen. Diese Annahme macht, dass sich die Ableitung von y_0 besonders einfach darstellen lässt. Es gilt mit (10.18)

$$\begin{aligned} y_0' &= \gamma_1' y_1 + \gamma_1 y_1' + \gamma_2' y_2 + \gamma_2 y_2' = \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2' \\ y_0'' &= \gamma_1' y_1' + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2' y_2' + \gamma_2 y_2'' \end{aligned}$$

Einsetzen in (10.16) liefert dann

$$(9.19) \quad \gamma_1' y_1' + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2' y_2' + \gamma_2 y_2'' + p_1(x) (\gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2') + p_0(x) (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = q(x) .$$

Da y_1 und y_2 Lösungen der zu (10.16) gehörigen homogenen Differentialgleichung sind, reduziert sich (10.19) auf

$$(9.20) \quad \gamma_1'(x) y_1'(x) + \gamma_2'(x) y_2'(x) = q(x) .$$

Aus den Gleichungen (10.18) und (10.20) lassen sich die unbekannten Funktionen γ_1' , γ_2' gewinnen; einfache Integration liefert dann γ_1 , γ_2 . Als explizites Beispiel für die Lagrange'schen Methode behandeln wir das folgende Beispiel.

Beispiel Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(9.21) \quad y'' + \omega^2 y = P \cos(\omega x)$$

sei gegeben. Die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ hat als allgemeine Lösung

$$(9.22) \quad x \rightarrow C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10.21) machen wir nach Lagrange den Ansatz

$$(9.23) \quad y_0(x) = \gamma_1(x) \cos(\omega x) + \gamma_2(x) \sin(\omega x) ,$$

wobei wir als zusätzliche Annahme

$$(9.24) \quad \gamma_1'(x) \cos(\omega x) + \gamma_2'(x) \sin(\omega x) = 0$$

verwenden. Einsetzen von (10.23) in (10.21) liefert nach einigen Rechnungen

$$(9.25) \quad -\gamma_1'(x) \omega \sin(\omega x) + \gamma_2'(x) \omega \cos(\omega x) = P \cos(\omega x) .$$

Aus den Gleichungen (10.24) und (10.25) ergibt sich

$$\begin{aligned}\gamma_1'(x) &= -\frac{P}{\omega} \cos(\omega x) \sin(\omega x) \\ \gamma_2'(x) &= \frac{P}{\omega} \cos^2(\omega x) .\end{aligned}$$

Integration liefert dann

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= -\frac{P}{2\omega^2} \sin^2(\omega x) \\ \gamma_2(x) &= \frac{P}{2\omega^2} (\sin(\omega x) \cos(\omega x) + \omega x) .\end{aligned}$$

(Auf die Integrationskonstanten kann verzichtet werden, da wir nur *eine partikuläre* Lösung im

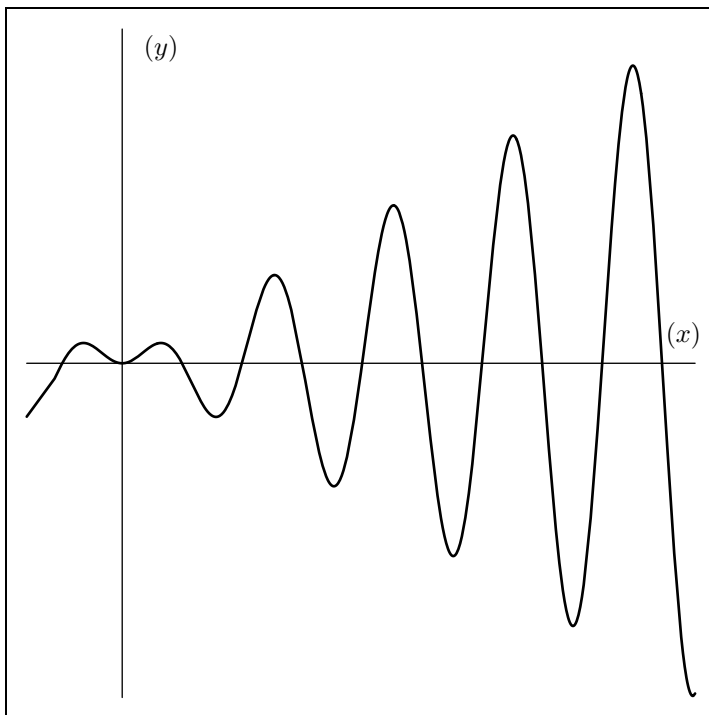


FIG. 3:
Die partikuläre Lösung

$$x \rightarrow \frac{P}{2\omega} x \sin(\omega x)$$

der Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = P \cos(\omega x)$$

Auge haben.) Es ergibt sich aus (10.23)

$$\begin{aligned}y_0(x) &= -\frac{P}{2\omega^2} \sin^2(\omega x) \cos(\omega x) + \frac{P}{2\omega^2} (\sin^2(\omega x) \cos(\omega x) + \omega x \sin(\omega x)) \\ &= \frac{P}{2\omega} x \sin(\omega x) .\end{aligned}$$

Damit lässt sich die allgemeine Lösung von (10.21) in der Form

$$(9.26) \quad y(x) = (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)) + \frac{P}{2\omega} x \sin(\omega x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

schreiben. Neben der harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz ω enthält sie einen Term mit einer linear zunehmenden Amplitude (siehe Figur 3).