

U. Stambach: Analysis I/II**Einige Zusätze, welche die *Lineare Algebra* betreffen.**

Wir betrachten hier noch einmal lineare autonome Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und machen auf einige Punkte aufmerksam, die in enger Beziehung zur *Linearen Algebra* stehen.

1. Es sei ein lineares autonomes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten gegeben:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases} \quad (1)$$

oder kurz

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}. \quad (2)$$

Das System heisst *homogen*, wenn \vec{b} Null ist, andernfalls heisst es *inhomogen*. Das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (3)$$

oder kurz

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (4)$$

heisst das zu (1) bzw. (2) gehörige homogene System.

Die Lösungen eines *homogenen* Systems bilden offensichtlich einen (reellen) Vektorraum, denn Einsetzen zeigt sofort, dass mit zwei Lösungen $(x_1(t), x_2(t))$ und $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ von (4) auch jede reelle Linearkombination

$$C(x_1(t), x_2(t)) + \tilde{C}(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$$

Lösung von (4) ist.

Ferner gilt auch unser alter Satz, dem wir bei linearen Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung begegnet sind und der uns dem Wortlaut nach bereits aus der *Linearen Algebra* bekannt ist:

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist gleich der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems plus einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems.

Man vergleiche dazu die Bemerkungen zum Abschnitt über lineare Differentialgleichungen 1. und höherer Ordnung. Der Beweis ist in allen Fällen einfach und formal immer derselbe.

2. Der im Abschnitt 12 von Kap. VII skizzierte Lösungsweg für lineare homogene Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten macht implizit Gebrauch von Resultaten der *Linearen Algebra*. Wir versuchen hier die Hintergründe etwas klarer zu machen.

Es sei das Differentialgleichungssystem mit zwei Gleichungen

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (5)$$

gegeben. Wir nehmen an, dass sich die Matrix A auf Diagonalgestalt bringen lässt. Dann gibt es eine Matrix B mit

$$B^{-1}AB = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann also

$$B^{-1}\dot{\vec{x}} = B^{-1}AB \cdot B^{-1}\vec{x} = D \cdot B^{-1}\vec{x}.$$

In dieser Form sind die Differentialgleichungen für die durch $\vec{y} = B^{-1}\vec{x}$ gegebenen Funktionen “entkoppelt”, und sie lassen sich deshalb einzeln lösen. Das Problem ist somit auf die *Lineare Algebra* reduziert, nämlich auf die Frage nach der Matrix B bzw. B^{-1} . Hier gilt folgendes: Es seien

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}$$

zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 . Dann ist die zur Koordinatentransformation gehörige Matrix durch $B = [c_{ik}]$ gegeben (siehe *Lineare Algebra*). Für das weitere Vorgehen wird man auch die zu B inverse Matrix B^{-1} kennen müssen. Im Falle, wo die Matrix A *symmetrisch* ist (siehe z.B. Chr. Blatter: *Lineare Algebra*, 10.3 Symmetrische Matrizen, p. 112 - 117), lassen sich die Eigenvektoren orthonormiert wählen. Dann kann man B^{-1} sehr leicht angeben: $B^{-1} = B^*$, wo für eine Matrix C , wie üblich, C^* die zu C transponierte Matrix bezeichnet (Spiegelung an der Hauptdiagonalen). Im Beispiel des Skripts haben wir

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da die neue Basis orthonormiert ist, ergibt sich B^{-1} zu

$$B^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Führt man die durch $\vec{y} = B^{-1}\vec{x}$ definierten neuen Funktionen ein, also

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(t) - x_2(t)) , \\ y_2(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(t) + x_2(t)) ,\end{aligned}$$

so sind die Gleichungen des Differentialgleichungssystems für $y_1(t)$ und $y_2(t)$ entkoppelt (siehe Skript, p. 108, Formel (13.3)). Dieses System lässt sich somit leicht lösen, und man kann anschliessend zu den ursprünglich gesuchten Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zurückkehren: $\vec{x} = B\vec{y}$.

3. Eine genauere Analyse zeigt – wir verzichten hier auf die Darstellung der Details –, dass man das Verfahren einerseits abkürzen kann und andererseits in gleicher Weise auch im Falle nicht-symmetrischer Matrizen anwenden kann. Die einzige Voraussetzung ist die, dass sich die Matrix A auf *Diagonalform* bringen lässt; dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Folgt man dem oben beschriebenen Vorgehen, so hat man die zu B inverse Matrix B^{-1} zu berechnen, was im Fall nicht symmetrischer Matrizen bekanntlich recht aufwendig ist. Bei genauerem Hinsehen lässt sich diese Schwierigkeit aber umgehen. Denn die diagonalisierte Matrix D besitzt in der Diagonalen gerade die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A . Damit lässt sich eine Basis $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ des Lösungsraumes des diagonalisierten Systems sofort hinschreiben. Man erhält daraus eine Basis des Lösungsraumes des *ursprünglichen* Systems durch $\vec{x} = B\vec{y}$, wo B die aus den Eigenvektoren der Matrix A bestehende Matrix ist. Die Kenntnis der Matrix B^{-1} ist also im Prinzip gar nicht notwendig, lediglich die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A sind zu bestimmen. (Für die Behandlung dieses allgemeinen Falles vergleiche man Chr. Blatter: *Lineare Algebra*, Abschnitt 11.2, p. 121-125. Dort sind auch die Lösungen explizit angegeben.)

4. Das explizit durchgerechnete Beispiel zeigt, dass das Verfahren selbst im Falle eines kleinen Systems ziemlich involviert ist. Es ist aber offensichtlich, dass es “automatisiert” werden kann und dass es dann auch für weit grössere Systeme einsetzbar ist. Die Transformation einer Matrix auf Diagonalgestalt gehört im übrigen zu den Grundaufgaben der *Linearen Algebra*. Für diese stehen sehr effiziente Computerprogramme zur Verfügung, die in diesem Zusammenhang eingesetzt werden können.

5. Für Interessenten zeigen wir hier zusätzlich noch, dass sich das Verfahren, nur geringfügig modifiziert, auch auf die noch allgemeinere Situation anwenden lässt, wo sich die Matrix A *nicht* auf *Diagonalgestalt* sondern nur auf *Dreiecksgestalt* bringen lässt. Ein Beispiel dazu wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{vmatrix}$$

gegeben (siehe Skript (13.4)). Dieses System wurde im Skript durch die Eliminationsmethode gelöst. Wir behandeln es hier nun aus der Sicht der *Linearen Algebra*.

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom der Matrix A des Systems,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Es ergibt sich $\alpha^2 - 6\alpha + 9$. (Man vergleiche mit dem charakteristischen Polynom der Differentialgleichung (13.8)). Es ist also $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ein doppelter Eigenwert. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich als nichttriviale Lösungen des homogenen Gleichungssystems mit Matrix $A - 3I$, also

$$\begin{vmatrix} 2a_1 + 1a_2 & = & 0 \\ -4a_1 - 2a_2 & = & 0 \end{vmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} , \quad s \in \mathbb{R} .$$

(Es gibt nur *einen* linear unabhängigen Eigenvektor. Damit ist klar, dass sich die Matrix A nicht auf Diagonalgestalt bringen lässt; man muss sich also mit der Dreiecksgestalt begnügen.) Man wählt nun als neue Basis die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(Der erste Vektor ist ein Eigenvektor, der zweite kann frei (vom ersten linear unabhängig!) gewählt werden. Zur Koordinatentransformation gehört dann die Matrix B ,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Matrix B^{-1} ,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Wir erhalten

$$B^{-1} \dot{\vec{x}} = B^{-1} A B \cdot B^{-1} \vec{x} = E \cdot B^{-1} \vec{x} ,$$

wobei die Matrix $E = B^{-1}AB$ gemäss Wahl der neuen Basis *Dreiecksgestalt* hat. Damit lässt sich das System für $\vec{y} = B^{-1}\vec{x}$ schrittweise lösen. Im konkreten Beispiel haben wir

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) ,\end{aligned}$$

und das neue System lautet

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_1 &= & 3y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= & 3y_2 \end{vmatrix} .$$

Dies liefert zuerst

$$y_2(t) = C_2 e^{3t}$$

und für y_1 muss die resultierende *inhomogene* lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}_1 = 3y_1 + C_2 e^{3t}$$

gelöst werden. Man erhält

$$y_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} .$$

(Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen plus partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung; letztere kann durch einen Ansatz oder durch die Methode von Lagrange gewonnen werden.) Schliesslich erhält man $\vec{x} = B\vec{y}$, also

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 e^{3t} + 2C_2 t e^{3t} \\ x_2(t) &= (-2C_1 + C_2) e^{3t} - 2C_2 t e^{3t}\end{aligned}$$

Dies ist – natürlich! – die gleiche Lösung, die man im Skript auf anderem Wege (siehe p. 110) erhalten hat.