

5 Lineare Differentialgleichungen

Die bei weitem wichtigste Klasse von Differentialgleichungen bilden die *linearen Differentialgleichungen*, sowohl was die Anwendungen wie auch was die Theorie betrifft, letzteres vor allem im Hinblick auf Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst **linear**, wenn sie von der Form

$$(5.1) \quad y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

ist, wobei $x \rightarrow p(x)$ und $x \rightarrow q(x)$ beliebige Funktionen von x sind. Die rechte Seite der Differentialgleichung ist also eine *lineare* Funktion in y ; man beachte, dass über die Funktionen p und q von x keine Voraussetzungen getroffen werden.

In (6.1) heisst der Term $q(x)$ **inhomogenes Glied** oder **Störglied**. Ist $q(x) \equiv 0$, so heisst (6.1) **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Die Differentialgleichung

$$(5.2) \quad y' = p(x) \cdot y$$

heisst **die zu (6.1) gehörige homogene Differentialgleichung**.

Die homogene lineare Differentialgleichung (6.2) lässt sich in der Form

$$\frac{y'}{y} = p(x)$$

schreiben. Damit haben wir die folgende wichtige Tatsache festgestellt:

Homogene lineare Differentialgleichungen sind separierbar.

Beispiel Die Differentialgleichung (siehe Figur 1)

$$(5.3) \quad y' = \frac{1}{x} y + 4x^2$$

ist offensichtlich linear mit $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 4x^2$. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$(5.4) \quad y' = \frac{1}{x} y .$$

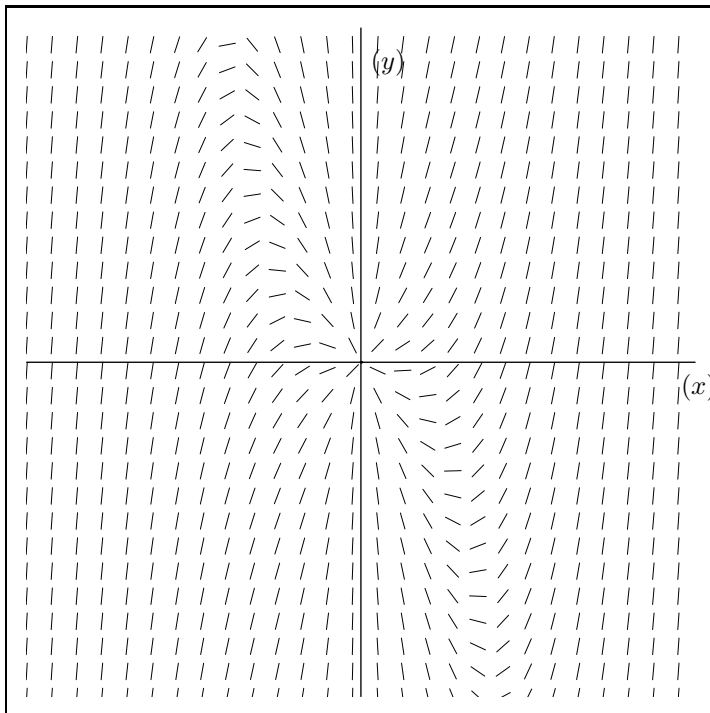


FIG. 1:
Richtungsfeld der linearen
Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x} y + 4x^2$$

Separieren liefert

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx ,$$

$$\log |y| = \log |x| + C .$$

Setzt man $A = \pm e^C$, so erhält man die allgemeine Lösung von (6.4) zu

$$(5.5) \quad y(x) = A \cdot x .$$

Als nächstes wenden wir uns der inhomogenen Differentialgleichung (6.1) zu. Wir nehmen zuerst an, dass wir aus irgend einem Grunde *eine* partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung kennen. Es sei also

$$y_0 : x \rightarrow y_0(x)$$

eine Funktion, welche (6.1) erfüllt:

$$(5.6) \quad y_0'(x) = p(x) y_0(x) + q(x) .$$

Wir behaupten nun:

Behauptung A Ist $y_h : x \rightarrow y_h(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (6.2), d.h. gilt

$$(5.7) \quad y_h'(x) \equiv p(x) y_h(x) ,$$

so ist die “Superposition” der Funktionen y_0 und y_h , d.h. die Funktion

$$x \rightarrow y_0(x) + y_h(x)$$

wieder eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6.1).

Beweis Wir beweisen dies durch Einsetzen. Wegen (6.6) und (6.7) gilt

$$\begin{aligned}(y_0(x) + y_h(x))' &= y_0'(x) + y_h'(x) \\ &= (p(x)y_0(x) + q(x)) + p(x)y_h(x) \\ &= p(x)(y_0(x) + y_h(x)) + q(x)\end{aligned}$$

d.h. $x \rightarrow y_0(x) + y_h(x)$ erfüllt die Differentialgleichung (6.1).

Als zweites behaupten wir:

Behauptung B *Ist die Funktion*

$$y_1 : x \rightarrow y_1(x)$$

eine weitere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6.1), so ist die Differenz

$$x \rightarrow y_1(x) - y_0(x)$$

eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (6.2).

Beweis In der Tat gilt

$$\begin{aligned}(y_1(x) - y_0(x))' &= y_1'(x) - y_0'(x) \\ &= (p(x)y_1(x) + q(x)) - (p(x)y_0(x) + q(x)) \\ &= p(x) \cdot (y_1(x) - y_0(x))\end{aligned}$$

d.h. $x \rightarrow y_1(x) - y_0(x)$ erfüllt die Differentialgleichung (6.2). Damit ist die Behauptung B bewiesen.

Aus der Behauptung B folgt, dass sich *jede* Lösung $x \rightarrow y_1(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (6.1) darstellen lässt als

$$(5.8) \quad y_1(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) ,$$

wo $\tilde{y}(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung (6.2) ist. Die Behauptung A sagt, dass jede Funktion der Form (6.8) eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6.1) ist. Wir erhalten damit das folgende allgemeine Verfahren zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6.1).

Man erhält die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x) ,$$

indem man eine partikuläre Lösung $y_0 : x \rightarrow y_0(x)$ nimmt und zu ihr die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' = p(x)y$$

addiert.

Dieses Superpositionsprinzip ist charakteristisch für lineare Differentialgleichungen. Wir wissen bereits, dass es *einfach* ist, die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu finden. Das Problem ist also auf die Aufgabe reduziert, eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung zu finden.

Oft lassen sich solche partikuläre Lösungen durch einen geschickt gewählten Ansatz auf einfache Art und Weise finden. In anderen Fällen ist es notwendig, ein umständlicheres Verfahren anzuwenden, das aber den Vorteil hat, dass es immer zum Ziel führt (Verfahren von Lagrange, J. L. Lagrange 1736 - 1813). Wir betrachten zuerst das Beispiel (6.3), wo ein einfacher Ansatz für y_0 genügt.

Beispiel Als Lösungsansatz für die Differentialgleichung (6.3)

$$y' = \frac{1}{x}y + 4x^2$$

versuchen wir

$$(5.9) \quad y_0(x) = ax^3$$

wo a eine noch zu bestimmende Konstante ist. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} 3ax^2 &\equiv \frac{ax^3}{x} + 4x^2, \\ 2ax^2 &\equiv 4x^2, \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Wir haben damit eine partikuläre Lösung von (6.3) erhalten

$$y_0(x) = 2x^3.$$

Nach unserem Verfahren liefert dies zusammen mit der allgemeinen Lösung (6.5) der zugehörigen homogenen Differentialgleichung die allgemeine Lösung von (6.3) (siehe Figur 2)

$$(5.10) \quad y(x) = Ax + 2x^3.$$

Als Faustregel kann man sich merken, dass man immer einen Ansatz für y_0 versuchen soll, der die Form des Störgliedes $q(x)$ hat. Ist also $q(x)$ ein Polynom, so soll man einen Polynomansatz versuchen, ist $q(x)$ eine Sinus- oder Cosinusfunktion, so soll man als Ansatz eine Summe einer Sinus- und Cosinusfunktion der gleichen Kreisfrequenz versuchen, usw. Nicht immer führt dies allerdings zum Ziel. Dann muss das *Verfahren von Lagrange* angewandt werden.

Wir betrachten wiederum die inhomogene Differentialgleichung (6.1) und nehmen an, dass wir eine Lösung $x \rightarrow y_h(x)$, $y_h \not\equiv 0$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (6.2) bereits kennen. Es gilt also

$$(5.11) \quad y'_h(x) \equiv p(x) \cdot y_h(x).$$

Wir machen nun den Ansatz von Lagrange

$$(5.12) \quad y_0(x) = \gamma(x) \cdot y_h(x),$$

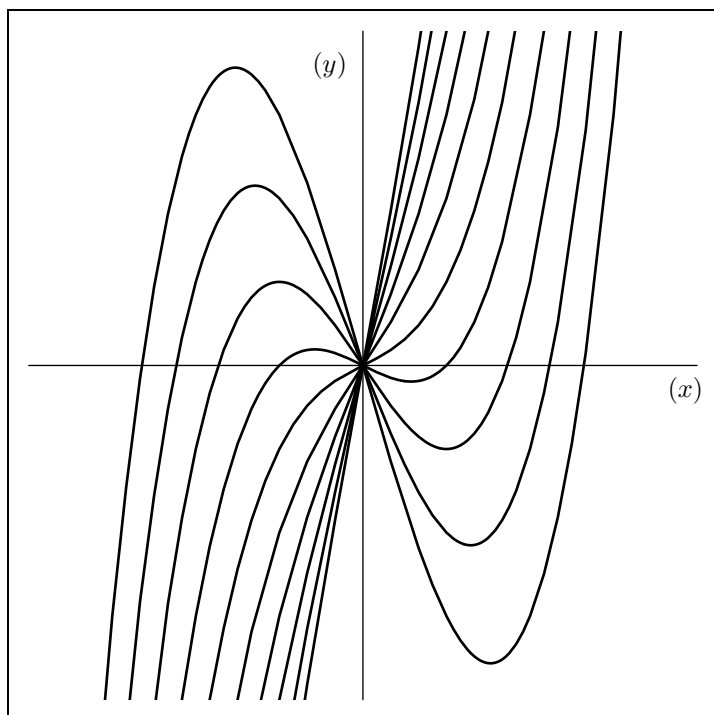


FIG. 2:
Lösungen der linearen
Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x}y + 4x^2$$

wobei $x \rightarrow \gamma(x)$ eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. (Man beachte, dass sich jede Funktion in der Form (6.12) darstellen lässt!) Einsetzen in (6.1) liefert

$$y_0'(x) = \gamma'(x)y_h(x) + \gamma(x)y_h'(x) \equiv p(x)\gamma(x)y_h(x) + q(x).$$

Wegen (6.11) ergibt sich daraus

$$\gamma'(x) = \frac{q(x)}{y_h(x)},$$

woraus sich durch Integration $\gamma(x)$ und damit $y_0(x)$ ergibt. Wir verfolgen den Lösungsweg an einem konkreten einfachen Beispiel.

Beispiel Es sei die Differentialgleichung

$$(5.13) \quad y' = \frac{y}{x} + 1$$

gegeben. Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x}$$

hat die allgemeine Lösung $y_h = Ax$. Als Ansatz von Lagrange setzt man

$$y_0(x) = \gamma(x) \cdot x$$

und erhält durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \gamma'(x) \cdot x + \gamma(x) &\equiv \frac{\gamma(x) \cdot x}{x} + 1, \\ \gamma'(x) &= \frac{1}{x}, \\ \gamma(x) &= \log |x|. \end{aligned}$$

Da wir nur an *einer* partikulären Lösung interessiert sind, können wir hier auf die Integrationskonstante verzichten. Wir erhalten

$$y_0 = x \log |x|$$

und als allgemeine Lösung von (6.13) (siehe Figur 3)

$$(5.14) \quad y(x) = Ax + x \log |x|.$$

Im verbleibenden Teil dieses Abschnittes diskutieren wir ein wichtiges **Beispiel** aus der Elektrodynamik. Es sei ein Schaltkreis mit einem Ohm'schen Widerstand R und einer Selbstinduktion L gegeben. Es interessiert der zur Zeit t im Schaltkreis fließende Strom $I(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$

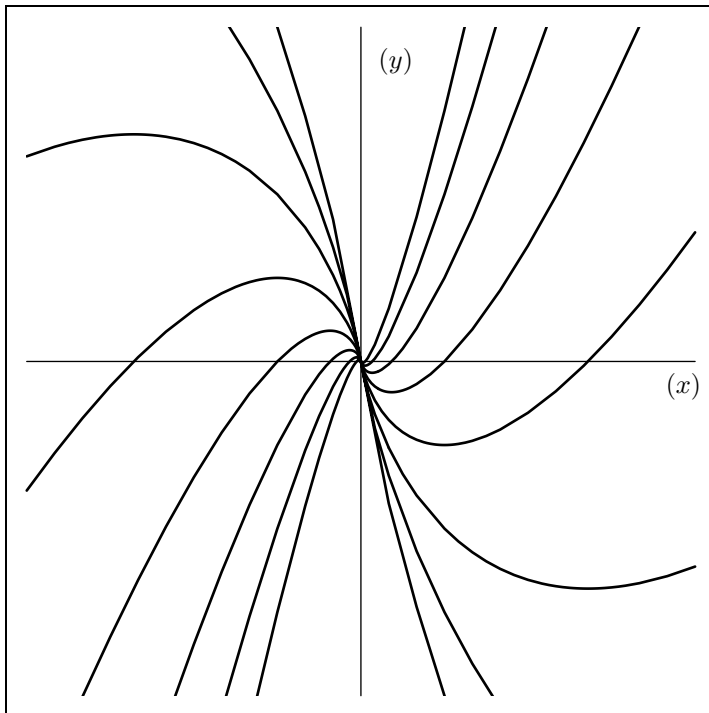


FIG. 3:
Lösungen der linearen
Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} + 1$$

- (a) eine konstante Spannung $U = U_0$,
(b) eine Wechselspannung $U = U_0 \cdot \cos(\omega t)$

angelegt wird (Das Beispiel (a) wurde bereits im Abschnitt 2 behandelt; wir erhalten die Lösung hier aber auf eine etwas andere Art). In der Physik lernt man, dass die Funktion $t \rightarrow I(t)$ der Differentialgleichung

$$(5.15) \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{U}{L}$$

genügt. Gesucht ist die Lösung von (6.15) in den Fällen (a), (b) zur Anfangsbedingung $I(0) = 0$. Offensichtlich handelt es sich bei (6.15) um eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I ;$$

sie hat als allgemeine Lösung

$$(5.16) \quad I_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Die beiden Fälle (a), (b) unterscheiden sich durch die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (6.15). Im Fall (a) hat man $U = U_0$ und eine Partikulärlösung lässt sich sofort erraten

$$I_0(t) = \frac{U_0}{R}.$$

Die allgemeine Lösung von (6.15) im Fall (a) ist also

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

und die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ liefert $C = -\frac{U_0}{R}$, so dass die gesuchte Lösung lautet

$$(5.17) \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Man vergleiche dazu Beispiel (c) im Abschnitt 2, wo dieses Resultat auf etwas anderem Weg erhalten worden ist.

Im Fall (b) hat man die Differentialgleichung

$$(5.18) \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{1}{L}U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

zu diskutieren. Wir machen unserer Faustregel folgend für die partikuläre Lösung $t \rightarrow I_0(t)$ den Ansatz

$$I_0(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

wo a , b zwei noch zu bestimmende reelle Konstanten sind. Einsetzen in (6.18) liefert

$$-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t) \equiv -\frac{R}{L}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) + \frac{U_0}{L} \cos(\omega t).$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} a\omega &= \frac{R}{L}b, \\ b\omega &= -\frac{R}{L}a + \frac{U_0}{L}, \end{aligned}$$

und es folgt

$$a = \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad b = \frac{U_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Zusammen mit (6.16) ergibt sich die allgemeine Lösung von (6.18)

$$(5.19) \quad I(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t) + \frac{U_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t).$$

Die Anfangsbedingung $I_0 = 0$ schliesslich liefert

$$C = -\frac{U_0 R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Man entnimmt der Formel (5.19), dass für grosse t die Funktion $I(t)$ gegen die partikuläre Lösung strebt. Man spricht deshalb auch etwa von der “stationären Lösung”, der Lösung nämlich, die sich nach langer Zeit einstellt (siehe Figur 4). Dass diese in unserem Beispiel eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω sein wird, ist natürlich zu erwarten und wird durch die Rechnung auch bestätigt. Man beachte aber, dass die Phase der Lösung mit der Phase der angelegten Spannung nicht übereinstimmt (siehe Figur 4)

Eine zweite Bemerkung betrifft die Grössen

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Diese lassen sich wegen

$$\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\right)^2 = 1$$

als Cosinus bzw. Sinus eines Winkels α deuten, welcher durch

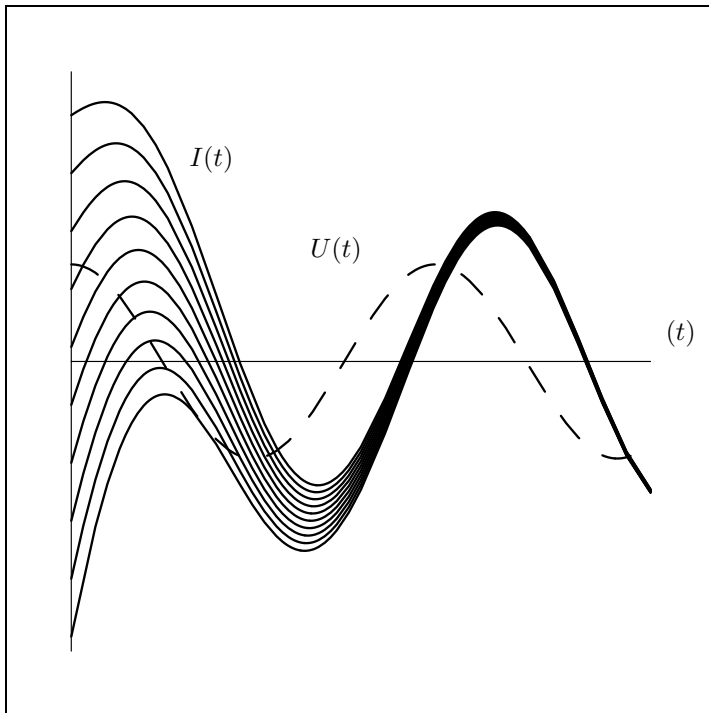


FIG. 4:
 Stromstärke in einem
 Stromkreis unter einer
 Klemmenspannung, die durch
 $t \rightarrow \cos(\omega t)$ gegeben ist

$$\tan \alpha = \frac{\omega L}{R}$$

gegeben ist. Die Lösung (5.19) schreibt sich dann als

$$\begin{aligned} I(t) &= C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\cos \alpha \cos(\omega t) + \sin \alpha \sin(\omega t)) \\ &= C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \alpha) . \end{aligned}$$

Die “stationäre Lösung” ist somit eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω der angelegten Spannung und einer Phasenverschiebung, die durch α gegeben ist.