

10 Zwei Klassen von leicht lösbaren linearen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit zwei Klassen von homogenen linearen Differentialgleichungen, welche in Anwendungen häufig auftreten und deren allgemeine Lösung leicht mit Hilfe eines Ansatzes gewonnen werden kann.

(a) Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Es sei die Differentialgleichung

$$(10.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

gegeben, wo a_0, a_1, \dots, a_{n-1} reelle Zahlen sind. Offensichtlich ist (11.1) eine lineare Differentialgleichung, in der die Koeffizienten von $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ Konstanten sind; man nennt deshalb (11.1) eine (homogene) **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**.

Um die allgemeine Lösung von (11.1) zu finden, brauchen wir nach Satz 9.2 n linear unabhängige Funktionen, welche (11.1) erfüllen. Zu diesem Zweck machen wir den Ansatz

$$(10.2) \quad x \rightarrow y(x) = e^{\alpha x}$$

und versuchen, α durch Einsetzen in (11.1) zu bestimmen. Das liefert

$$e^{\alpha x} (\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0) = 0 .$$

Daraus folgt, dass (11.2) genau dann eine Lösung von (11.1) ist, wenn α eine Nullstelle des sogenannten **charakteristischen Polynoms**

$$(10.3) \quad \alpha \rightarrow \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0$$

ist.

Beispiel Es sei die Differentialgleichung

$$(10.4) \quad y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

gegeben. Das charakteristische Polynom ist

$$\alpha \rightarrow \alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha = \alpha(\alpha + 1)(\alpha - 3) .$$

Es hat die Nullstellen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 3$. Daraus schliesst man, dass die Funktionen

$$x \rightarrow e^{0x} = 1, \quad x \rightarrow e^{-x}, \quad x \rightarrow e^{3x}$$

Lösungen von (11.4) sind. Da sie linear unabhängig sind (warum?), ist nach unserem Satz 9.2

$$x \rightarrow C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} .$$

die allgemeine Lösung von (11.4).

Dieses Verfahren führt *dann* problemlos zu n linear unabhängigen Funktionen, wenn das charakteristische Polynom n *verschiedene reelle* Nullstellen besitzt. Dies braucht aber nicht der Fall zu sein: es können mehrfache Nullstellen und es können komplexe Nullstellen auftreten. Da letztere bei reellen Polynomen immer in konjugiert komplexen Paaren auftreten und die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen eines Polynoms n -ten Grades stets n ist, müssen wir zu jeder k -fachen reellen Nullstelle k linear unabhängige Funktionen und zu jedem Paar konjugiert komplexer k -facher Nullstellen $2k$ linear unabhängige Funktionen finden. Diese erhalten wir nach der folgenden Regel:

Ist α eine k -fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms (11.3), so sind die Funktionen

$$x \rightarrow e^{\alpha x}, \quad x \rightarrow x e^{\alpha x}, \dots, \quad x \rightarrow x^{k-1} e^{\alpha x}$$

k linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (11.1)

Ist $\alpha = a + ib$, $\bar{\alpha} = a - ib$, $b \neq 0$ ein Paar konjugiert komplexer k -facher Nullstellen des charakteristischen Polynoms (11.3), so sind die Funktionen

$$\begin{array}{ll}
x \rightarrow e^{ax} \cos bx & x \rightarrow e^{ax} \sin bx \\
x \rightarrow x e^{ax} \cos bx & x \rightarrow x e^{ax} \sin bx \\
\vdots & \vdots \\
x \rightarrow x^{k-1} e^{ax} \cos bx & x \rightarrow x^{k-1} e^{ax} \sin bx
\end{array}$$

$2k$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (11.1).

Wir verzichten hier auf einen Beweis für diese beiden Regeln. Zur zweiten merken wir aber noch Folgendes an. Ist $a + ib$ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist die komplexwertige Funktion

$$y_1 : x \rightarrow e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

eine “Lösung” der Differentialgleichung. Da auch $a - ib$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, gilt dasselbe für

$$y_2 : x \rightarrow e^{(a-ib)x} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) .$$

Wegen der Linearität (bezüglich komplexer Zahlen) der Differentialgleichung müssen dann auch die reellwertigen Funktionen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x)) &= e^{ax} \cos bx \\
\frac{1}{2i}(y_1(x) - y_2(x)) &= e^{ax} \sin bx
\end{aligned}$$

Lösungen der Differentialgleichung (11.1) sein.

Beispiel Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(10.5) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = 0 .$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 .$$

Es lässt sich schreiben als $(\alpha^2 + 1)^2$; die Nullstellen sind $\alpha = \pm i$, beide mit Vielfachheit 2. Mit Hilfe unserer Regel erhalten wir vier linear unabhängige Funktionen; deren reelle Linearkombinationen

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x ,$$

bilden die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11.5).

(b) Homogene Eulersche Differentialgleichungen

Eine weitere Klasse von linearen Differentialgleichungen lässt sich ähnlich behandeln wie die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, nämlich die Eulerschen Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung heisst **Euler'sch**, wenn sie sich in der Form

$$(10.6) \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_0}{x^n} y = 0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

Nach unserem Satz 9.2 besteht unsere Aufgabe darin, n linear unabhängige Funktionen zu finden, welche (11.6) erfüllen. Ähnlich wie für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gewinnen wir diese mit Hilfe eines Ansatzes. Wir setzen

$$(10.7) \quad y(x) = x^\alpha$$

und versuchen α durch Einsetzen in (11.6) zu bestimmen. Wir erhalten

$$\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) x^{\alpha-n} + a_{n-1} \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 2) x^{\alpha-n} + \dots + a_0 x^{\alpha-n} = 0 .$$

Es folgt, dass (11.7) genau dann eine Lösung der Differentialgleichung (11.6) liefert, wenn α eine Nullstelle des sogenannten **Indexpolynoms**

$$(10.8) \quad \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) + a_{n-1} \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 2) + \dots + a_0$$

ist. Hat das Indexpolynom n verschiedene reelle Nullstellen, so liefert dieses Verfahren n linear unabhängige Funktionen, welche (11.6) erfüllen. Wie bei linearen Differentialgleichungen mit

konstanten Koeffizienten müssen die Fälle von mehrfachen Nullstellen und komplexen Nullstellen zusätzlich behandelt werden. Wir merken ohne Beweis die folgende Regel an:

Ist α eine k -fache reelle Nullstelle des Indexpolynoms (11.8), so sind die Funktionen

$$x \rightarrow x^\alpha, \quad x \rightarrow (\log x)x^\alpha, \dots, \quad x \rightarrow (\log x)^{k-1}x^\alpha$$

k linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (11.6).

Ist $\alpha = a + ib, \bar{\alpha} = a - ib, b \neq 0$ ein Paar konjugiert komplexer k -facher Nullstellen des Indexpolynoms (11.8), so sind die Funktionen

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow x^a \cos(b \log x) & x \rightarrow x^a \sin(b \log x) \\ x \rightarrow (\log x)x^a \cos(b \log x) & x \rightarrow (\log x)x^a \sin(b \log x) \\ \vdots & \vdots \\ x \rightarrow (\log x)^{k-1}x^a \cos(b \log x) & x \rightarrow (\log x)^{k-1}x^a \sin(b \log x) \end{array}$$

$2k$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (11.6)

Beispiel Untersucht man die stationäre Temperaturverteilung auf einer homogenen Kreisscheibe oder auf einem homogenen Kreisring, so tritt (siehe Analysis III) auf natürliche Weise die folgende Differentialgleichung für $r \rightarrow y(r)$

$$(10.9) \quad y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{m^2}{r^2}y = 0$$

auf. Dabei bezeichnet r den Abstand vom Mittelpunkt der Kreisscheibe, und m ist eine beliebige natürliche Zahl. Die homogene lineare Differentialgleichung (11.9) ist offensichtlich Euler'sch. Das Indexpolynom lautet

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - m^2 = \alpha^2 - m^2 .$$

Ist $m > 0$, so sind $\alpha = \pm m$ die beiden Nullstellen des Indexpolynoms. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11.9) lautet in diesem Fall

$$y(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-m}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

Ist $m = 0$, so ist $\alpha = 0$ eine doppelte Nullstelle des Indexpolynoms. Nach unserer Regel ist in diesem Fall die allgemeine Lösung von (11.9) durch

$$y(r) = C_1 + C_2 \log r, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der folgenden Bemerkung. Die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichungen ergibt sich formal ganz analog zur Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. In der Tat lässt sich eine Eulersche Differentialgleichung für die Funktion $x \rightarrow y(x)$ durch die einfache Substitution $x = e^t$ auf eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $t \rightarrow y(e^t)$ zurückführen. Das Indexpolynom geht dann ins charakteristische Polynom über. Wir überlassen es dem Leser, die Details dieser Substitution durchzuführen.