

## 8 Differentialgleichungen höherer Ordnung, allgemeines

Eine **Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** für die Funktion  $y : x \rightarrow y(x)$  ist eine Gleichung

$$(8.1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Analog wie bei Differentialgleichungen 1. Ordnung nehmen wir an (vgl. (3.1) ), dass sich (9.1) nach  $y^{(n)}$  auflösen lässt:

$$(8.2) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) .$$

In dieser Form wollen wir Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung diskutieren. Betrachten wir zuerst ein ganz einfaches Beispiel.

**Beispiel** Es sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(8.3) \quad y'' = a$$

für die Funktion  $x \rightarrow y(x)$  gegeben;  $a \in \mathbb{R}$  sei eine Konstante. Offensichtlich sind die Lösungsfunktionen von (9.3) von der Form

$$x \rightarrow y(x) = \frac{a}{2}x^2 + C_1x + C_2 ,$$

wo  $C_1, C_2$  beliebige reelle Konstanten sind. Die Lösungskurven sind Parabeln, welche von den zwei Parametern  $C_1, C_2$  abhängen. Die **allgemeine Lösung** von (9.3) ist eine 2-parametrische Kurvenschar.

Ist zusätzlich zu (9.3) noch die Anfangsbedingung

$$(8.4) \quad y(x_0) = y_0 .$$

gegeben, so führt dies auf die Gleichung

$$(8.5) \quad \frac{a}{2}x_0^2 + C_1x_0 + C_2 = y_0 .$$

Natürlich genügt diese einzige Gleichung *nicht* zur Festlegung der *speziellen* Lösung, d.h. zur Bestimmung von  $C_1$  und  $C_2$ . Dafür muss eine *zweite* Anfangsbedingung hinzutreten. In vielen Fällen, aber durchaus nicht immer, ist sie von der Form

$$(8.6) \quad y'(x_0) = y_0^{(1)} .$$

d.h. es wird an der Stelle  $x_0$  zusätzlich noch die Steigung der Kurve vorgeschrieben. Diese Anfangsbedingung führt auf die Gleichung

$$(8.7) \quad ax_0 + C_1 = y_0^{(1)} .$$

Die Gleichungen (9.5) , (9.7) lassen sich nun leicht nach  $C_1$  und  $C_2$  auflösen; zusammen bestimmen sie offenbar beide Parameter und damit die spezielle Lösung der Differentialgleichung (9.3) eindeutig.

Wir fassen zusammen: Zu jeder Wahl von  $y_0, y_0^{(1)}$  gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion  $x \rightarrow y(x)$ , welche die Differentialgleichung (9.3) und die zwei Anfangsbedingungen (9.4) und (9.6) erfüllt. Damit haben wir den folgenden allgemeinen Satz illustriert, der eine direkte Verallgemeinerung unseres Satzes 3.1 über die allgemeine Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung ist.

**Satz 8.1** *Es sei die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung*

$$(8.8) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

*gegeben. Die Funktion  $f$  (von  $n+1$  Variablen) sei stetig in  $x$  und nach  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  stetig partiell differenzierbar. Dann gibt es zu vorgegebenen  $x_0, y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$  eine eindeutig bestimmte, in einem Intervall mit Mittelpunkt  $x_0$  definierte Funktion  $y : x \rightarrow y(x)$ , welche Lösung der Differentialgleichung (9.8) ist und die (Anfangs-)Bedingungen*

$$(8.9) \quad y(x_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

*erfüllt.*

Natürlich verzichten wir in dieser Vorlesung auf den Beweis dieses Satzes. Wie der Satz 3.1 für Differentialgleichungen 1. Ordnung, so bildet Satz 8.1 die Grundlage für das, was im Folgenden über die Lösungen von Differentialgleichungen höherer ( $n$ -ter) Ordnung gesagt wird.

Betrachten wir zuerst die *allgemeine Lösung* von (9.8), d.h. die Schar aller Lösungskurven. Geben wir uns  $x_0$  vor, so besagt unser Satz, dass es zu jeder Wahl der Grössen

$$y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$$

genau eine Lösungskurve von (9.8) gibt, welche die  $n$  Gleichungen (9.9) befriedigt. Die erste dieser Gleichungen,  $y(x_0) = y_0^{(0)}$  legt einen Punkt  $(x_0, y_0)$  der Kurve fest, die zweite  $y'(x_0) = y_0^{(1)}$  die Steigung der Kurve in diesem Punkt, die dritte  $y''(x_0) = y_0^{(2)}$  die 2. Ableitung der Funktion, also im wesentlichen die Krümmung der Kurve in diesem Punkt, usw. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (9.8)  $n$ -ter Ordnung ist also eine (wie man sagt *reguläre*)  *$n$ -parametrische Kurvenschar*. Analog wie im Fall der Differentialgleichungen 1. Ordnung heisst regulär hier, dass die Gleichungen (9.9) bei jeder Wahl der Grössen  $x_0, y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$  von genau einer Kurve der Schar erfüllt werden.

Umgekehrt kann man natürlich fragen, ob es zu einer gegebenen (regulären)  $n$ -parametrischen Kurvenschar eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung gibt, welche gerade diese Schar als allgemeine Lösung besitzt. Unter sehr allgemeinen Bedingungen, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen, ist dies tatsächlich der Fall. Wir illustrieren den Sachverhalt an zwei Beispielen.

**Beispiel** Wir betrachten die 2-parametrische Schar

$$(8.10) \quad y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x), \quad \omega \neq 0$$

mit den Parametern  $C_1, C_2$ . Wir wollen zuerst zeigen, dass diese Schar regulär ist. Dazu müssen wir nachweisen, dass zu beliebig vorgegebenen Zahlen  $x_0, y_0^{(0)}, y_0^{(1)}$  genau eine Wahl von  $C_1$  und  $C_2$  existiert, so dass die Gleichungen  $y(x_0) = y_0^{(0)}, y'(x_0) = y_0^{(1)}$  erfüllt sind. Dieses führt auf das folgende Gleichungssystem für  $C_1$  und  $C_2$

$$(8.11) \quad \begin{vmatrix} C_1 \cos(\omega x_0) & + & C_2 \sin(\omega x_0) & = & y_0^{(0)} \\ -C_1 \omega \sin(\omega x_0) & + & C_2 \omega \cos(\omega x_0) & = & y_0^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Nach der Theorie der linearen Gleichungssysteme (siehe "Lineare Algebra") hat das System (9.11) für beliebige Wahl der Grössen  $y_0^{(0)}, y_0^{(1)}$  eine eindeutig bestimmte Lösung (für  $C_1, C_2$ ), wenn die Determinante der Matrix des Systems nicht Null ist. In unserem Fall gilt

$$\det \begin{bmatrix} \cos(\omega x_0) & \sin(\omega x_0) \\ -\omega \sin(\omega x_0) & \omega \cos(\omega x_0) \end{bmatrix} = \omega \neq 0 .$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Schar (9.10) regulär ist. (Man beachte, dass lineare Gleichungssysteme mit nicht verschwindender Determinante gewöhnlich “regulär” genannt werden. Das steht in Übereinstimmung mit unserer Wahl des Wortes “regulär” für die Kurvenscharen, mit denen wir es hier zu tun haben.)

Nach unserer Aussage sollte somit die 2-parametrische Schar (9.10) allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung sein. Diese erhalten wir wie folgt. Wir leiten die Schargleichung 2-mal nach  $x$  ab

$$(8.12) \quad y'(x) = -\omega C_1 \sin(\omega x) + \omega C_2 \cos(\omega x) ,$$

$$(8.13) \quad y''(x) = -\omega^2 C_1 \cos(\omega x) - \omega^2 C_2 \sin(\omega x)$$

und eliminieren die Scharparameter  $C_1, C_2$  aus den 3 Gleichungen (9.10), (9.12), (9.13). Im vorliegenden Fall ist das einfach dadurch zu bewerkstelligen, dass (9.10) mit  $\omega^2$  multipliziert und zu (9.13) addiert wird. Wir erhalten

$$(8.14) \quad y'' + \omega^2 y = 0 .$$

Dies ist offensichtlich die Differentialgleichung der Kurvenschar (9.10).

**Beispiel** In unserem zweiten Beispiel sei die 3-parametrische Kurvenschar

$$(8.15) \quad y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x)$$

gegeben. Wir betrachten also nicht nur harmonische Schwingungen zu einer *festen* Frequenz  $\omega$  wie im obigen Beispiel, sondern zu *beliebigen* Kreisfrequenzen. Da wir hier drei Parameter haben, wird die zugehörige Differentialgleichung von 3. Ordnung sein. Durch Ableitung nach  $x$  erhalten wir

$$(8.16) \quad y' = -C_3 C_1 \sin(C_3 x) + C_3 C_2 \cos(C_3 x) ,$$

$$(8.17) \quad y'' = -C_3^2 C_1 \cos(C_3 x) - C_3^2 C_2 \sin(C_3 x) ,$$

$$(8.18) \quad y''' = C_3^3 C_1 \sin(C_3 x) - C_3^3 C_2 \cos(C_3 x) .$$

Aus den Gleichungen (9.15), (9.16), (9.17) und (9.18) sind nun die Parameter  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  zu eliminieren. Division von (9.18) durch (9.16) liefert

$$\frac{y'''}{y'} = -C_3^2 .$$

Ferner ergibt sich, wie oben, aus (9.15) und (9.17) die Gleichung

$$y'' + C_3^2 y = 0 .$$

Als Differentialgleichung der Schar (9.15) erhalten wir somit

$$(8.19) \quad y' y'' - y''' y = 0 ;$$

natürlich ist sie 3. Ordnung, wie wir vorausgesehen haben.

Wir haben hier bereits eine ganze Reihe von allgemeinen Aussagen über das Lösungsverhalten von Differentialgleichungen höherer Ordnung kennengelernt. Versucht man in konkreten Fällen die allgemeine Lösung zu beschreiben, so merkt man bald, dass dies ein schwieriges Unterfangen ist. In der Tat ist es nur selten überhaupt möglich, die allgemeine Lösung in geschlossener Form hinzuschreiben. Man ist hier in noch grösseren Massen als bei Differentialgleichungen 1. Ordnung auf numerische Methoden angewiesen, wobei gleichzeitig darauf hingewiesen werden muss, dass erst die allgemeine Aussage über das Lösungsverhalten diese numerischen Verfahren überhaupt ermöglichen. Glücklicherweise zeigt sich ausserdem, dass viele der in einfachen Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen höherer Ordnung zu den “seltenen Ausnahmen” gehören und explizit in geschlossener Form lösbar sind. Mit diesen wollen wir uns in den nächsten Abschnitten vornehmlich befassen. Hier fügen wir noch ein einfaches Anwendungsbeispiel an.

**Beispiel** Wir betrachten einen prismatischen Balken der Länge  $l$  welcher links eingespannt und rechts frei ist (siehe Figur 1). Die Lage des Balkens, die sogenannte Biegelinie, sei durch die Funktion  $x \rightarrow y(x)$  beschrieben. Man lernt in der Mechanik, dass zwischen dem Biegemoment  $M(x)$  im Balkenquerschnitt an der Stelle  $x$  und der Krümmung  $k(x)$  der Biegelinie an der Stelle  $x$  die folgende Beziehung besteht

$$(8.20) \quad M(x) = E J k(x) .$$

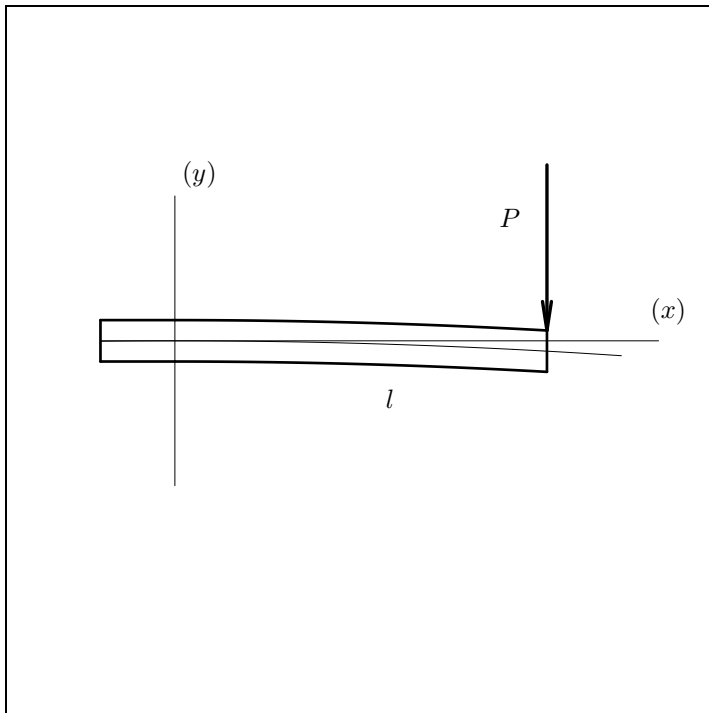


FIG. 1 :  
Biegelinie eines horizontal  
eingespannten Balkens

Dabei ist  $E$  der Elastizitätsmodul des Balkens und  $J$  das axiale Trägheitsmoment eines Querschnittes des Balkens bezüglich einer horizontalen Achse durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Die Krümmung ist gegeben durch

$$(8.21) \quad k(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Daraus folgt

$$(8.22) \quad \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ} .$$

Dies ist bei gegebener Beanspruchung, d.h. wenn  $M(x)$  bekannt ist, eine Differentialgleichung für die Biegelinie des Balkens. Die “Anfangs”-Bedingungen sind offensichtlich

$$(8.23) \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 ,$$

sie sind also von der Art, wie wir sie in Satz 8.1 betrachtet haben. Die Differentialgleichung (8.22) ist wegen des Auftretens einer Wurzel mit  $y'$  im Radikanden kompliziert. Man sieht aber

sofort, dass für die betrachtete Anwendung die Steigung der Biegelinie des Balkens immer sehr klein sein wird. Es gilt deshalb näherungsweise

$$(8.24) \quad 1 + y'^2 \sim 1 .$$

Es ergibt sich dann die *Differentialgleichung der Biegelinie eines Balkens* (siehe M.B. Sayir: Mechanik 2, p. 107)

$$(8.25) \quad y'' = \frac{M(x)}{EJ} .$$

Betrachten wir noch die spezielle Situation, wo der Balken an der Stelle  $l$  durch eine Einzelast  $P$  belastet wird. Ist  $P$  gegenüber dem Eigengewicht des Balkens gross, so darf letzteres vernachlässigt werden. Wir erhalten dann

$$M(x) = -(l - x)P$$

und damit die Differentialgleichung

$$(8.26) \quad y'' = -\frac{(l - x)P}{EJ} .$$

Diese einfache Differentialgleichung lässt sich durch zweimalige Integration direkt lösen. Man hat

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{P}{EJ}(-lx + \frac{1}{2}x^2 + C_1) , \\ y(x) &= \frac{P}{EJ}(-\frac{l}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2) . \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen (9.23) liefert  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , so dass die Biegelinie des Balkens durch

$$y(x) = \frac{P}{EJ} \left( -\frac{l}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right)$$

gegeben ist; insbesondere ist die Auslenkung an der Stelle  $x = l$  gegeben durch

$$y(l) = -\frac{P}{EJ} \frac{l^3}{3} .$$

Wir haben in unserem Beispiel eine komplizierte Differentialgleichung (9.22) vereinfacht, indem wir die Näherung (9.24) verwendet haben. Dies ist eine vielgeübte Praxis, die uns bereits bekannt ist und darin besteht, dass man eine komplizierte Funktion durch ihre lineare Ersatzfunktion ersetzt. In der Tat haben wir die Funktion

$$y' \rightarrow (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = g(y')$$

in der Nähe des Punktes  $y' = 0$  durch ihre lineare Ersatzfunktion ersetzt:

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \sim g(0) + g'(0)y' = 1 + 0 ,$$

denn  $g'(0) = 0$ . Wir werden weiter unten noch mehrere ähnliche Beispiele kennenlernen. Die Frage, “ob man das darf”, d.h. ob die Lösungen der vereinfachten Differentialgleichungen dann auch Näherungen für die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind, haben wir mit gutem Grund hier nicht diskutiert. Sie führt auf heikle und schwierig zu behandelnde mathematische Fragen (vgl. Burg, Haf, Wille III, S.72 ff.).

Betrachtet man an Stelle des links eingespannten Balkens den beidseitig aufgelegten Balken, so nehmen die zusätzlichen Bedingungen eine andere Form an. Sie lauten dann nämlich

$$(8.27) \quad y(0) = 0 = y(l) ,$$

es sind somit “Randbedingungen” vorgegeben. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung von (9.25), welche (9.27) erfüllt, folgen in dieser Situation nicht mehr aus unserem allgemeinen Satz 8.1; sie müssen gesondert diskutiert werden.

Zum Abschluss dieses Abschnittes weisen wir noch darauf hin, dass ein enger Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systemen von Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht. Dazu werden wir weiter unten noch einiges zu sagen haben.