

7 Enveloppen, Singuläre Lösungen, Clairaut'sche Differentialgleichungen

Es sei eine Schar von Kurven gegeben. Unter einer **Envelope** (**Umhüllenden**) der Schar verstehen wir eine Kurve K , welche in jedem ihrer Punkte eine Kurve der Schar berührt.

Wie man am Beispiel der Schar der Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung feststellen kann, besitzt nicht jede Kurvenschar eine Envelope. Gibt es aber eine, so spielt sie gewöhnlich eine ausgezeichnete Rolle. Wird zum Beispiel die Kurvenschar durch die Differentialgleichung

$$(7.1) \quad y' = f(x, y)$$

beschrieben, so erfüllen offensichtlich nicht nur die Kurven der Schar diese Differentialgleichung, sondern auch ihre Envelope; in jedem ihrer Punkte stimmt ja ihre Steigung mit der Steigung der Scharkurve durch diesen Punkt überein. Neben den offensichtlichen Lösungen der Differentialgleichung (8.1), die durch die Kurven der Schar gegeben sind, gibt es also noch eine "versteckte", eine **singuläre** Lösung, die der Envelope der Schar entspricht.

Man entnimmt leicht der Figur 1, dass die Differentialgleichung (8.1) in den Punkten der Envelope die Voraussetzungen des Satzes 3.1 nicht erfüllen kann, denn durch diese Punkte gibt es *mehrere* Lösungen der Differentialgleichung (8.1).

Wie bestimmt man die Envelope einer Kurvenschar? Die Schar sei gegeben durch die Gleichung

$$(7.2) \quad F(x, y, C) = 0 .$$

Dem Parameterwert C ordnen wir (abstrakt) den Punkt $(x(C), y(C))$ der Envelope K zu, in dem K die zu C gehörige Scharkurve berührt (siehe Figur 1). Dann kann

$$(7.3) \quad C \rightarrow (x(C), y(C))$$

als Parameterdarstellung der Envelope aufgefasst werden. Nun gilt, da $(x(C), y(C))$ auf der zu C gehörigen Scharkurve liegt,

$$(7.4) \quad F(x(C), y(C), C) = 0 .$$

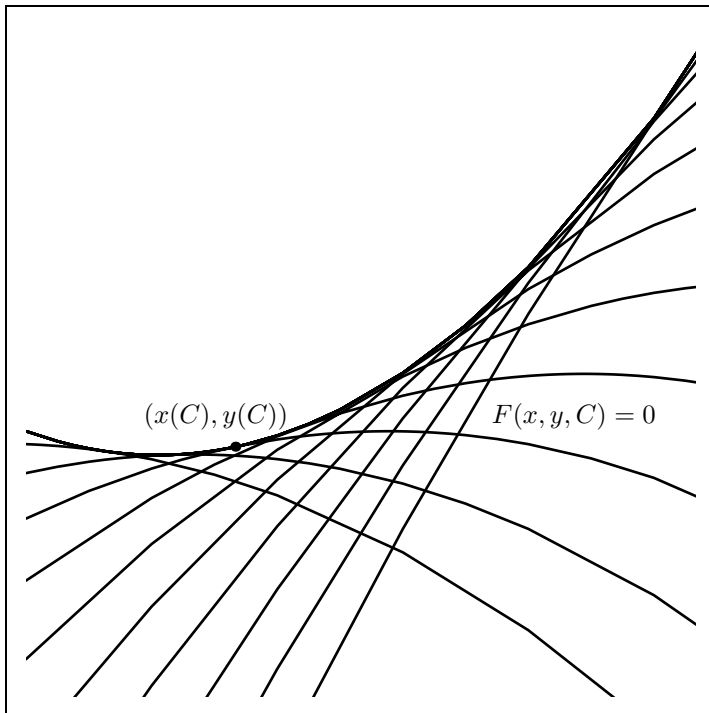


FIG. 1:
Envelope einer Kurvenschar

Ferner *berühren* sich in $(x(C), y(C))$ Scharkurve und Envelope, ihre Steigungen stimmen in diesem Punkte überein:

$$(7.5) \quad \frac{\dot{y}(C)}{\dot{x}(C)} = - \frac{F_x(x(C), y(C), C)}{F_y(x(C), y(C), C)} .$$

Links steht die Steigung der Envelope (8.3) und rechts steht die Steigung der implizit gegebenen Scharkurve. Wir schreiben (7.5) in der Form

$$(7.6) \quad F_x(x(C), y(C), C) \dot{x}(C) + F_y(x(C), y(C), C) \dot{y}(C) = 0 .$$

Ausserdem liefert die totale Ableitung nach C von (8.4) die Gleichung

$$(7.7) \quad F_x(x(C), y(C), C) \dot{x}(C) + F_y(x(C), y(C), C) \dot{y}(C) + F_C(x(C), y(C), C) = 0 .$$

Zusammen mit (8.6) folgt daraus

$$(7.8) \quad F_C(x(C), y(C), C) = 0 .$$

Wir fassen zusammen: Die Enveloppe der durch (8.2) gegebenen Kurvenschar erhält man durch Elimination des Scharparameters C aus den Gleichungen

$$(7.9) \quad \left| \begin{array}{l} F(x, y, C) = 0 \\ F_C(x, y, C) = 0 \end{array} \right| .$$

Beispiel Wir betrachten die Kurvenschar der Flugbahnen eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus dem Ursprung schräg nach oben “geschossenen” Massenpunktes im Erdanziehungsfeld.

Ist α der Abschusswinkel, so ist die Bahn des Massenpunktes gegeben durch

$$t \rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} .$$

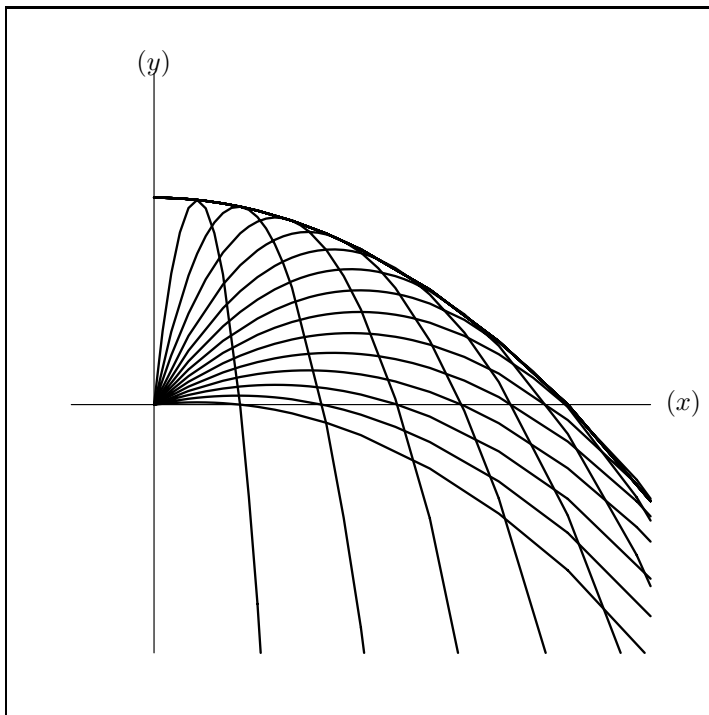


FIG. 2:
Die Enveloppe der Wurfparabeln

Setzen wir $h = g/2v_0^2$, so liefert die Elimination von t die “Flugparabel”

$$(7.10) \quad F(x, y, \alpha) := y - x \tan \alpha + \frac{h}{\cos^2 \alpha} x^2 = 0 .$$

Dies ist die Schar von Kurven, die wir in diesem Beispiel betrachten wollen; Scharparameter ist α . Für die Bestimmung der Enveloppen benötigen wir die Gleichung $F_\alpha(x, y, \alpha) = 0$. Es gilt

$$(7.11) \quad F_\alpha(x, y, \alpha) = -\frac{x}{\cos^2 \alpha} + \frac{2h}{\cos^3 \alpha} (\sin \alpha) x^2 = 0.$$

Aus (8.11) folgt

$$\tan \alpha = \frac{1}{2hx}$$

und Einsetzen in (8.10) liefert wegen $\cos \alpha = 2hx / \sqrt{1 + (2hx)^2}$

$$(7.12) \quad y = \frac{1}{4h} - hx^2.$$

Wir stellen die interessante Tatsache fest, dass die Enveloppe der Flugparabeln wieder eine Parabel ist (siehe Figur 2). Sie umgrenzt den Bereich, der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 überhaupt erreichbar ist.

Schliesslich spezialisieren wir unsere Betrachtungen auf Kurvenscharen, welche aus Geraden bestehen. Wählt man als Parameter C der Schar gerade die Steigung der Geraden, so stellt sich eine solche Schar durch eine Gleichung der Form

$$(7.13) \quad y = C \cdot x + g(C)$$

dar, wo $g: C \rightarrow g(C)$ eine Funktion von C ist. Berechnet man die Enveloppe einer solchen Schar, so erhält man

$$\left| \begin{array}{rcl} F(x, y, C) & := & -y + Cx + g(C) = 0 \\ F_C(x, y, C) & = & x + g'(C) = 0 \end{array} \right|$$

und damit die folgende Parameterdarstellung der Enveloppe

$$(7.14) \quad \begin{cases} x = -g'(C) \\ y = -Cg'(C) + g(C) \end{cases}.$$

Um die Differentialgleichung der Schar (8.13) zu erhalten, berechnet man zunächst die totale Ableitung der Gleichung (8.13) nach x ,

$$(7.15) \quad y' = C ,$$

und eliminiert dann C aus (8.13) und (8.15). Man erhält

$$(7.16) \quad y = y'x + g(y') .$$

Eine Differentialgleichung der Form (8.16) heisst **Clairaut'sche Differentialgleichung**. Zahlreiche geometrische Probleme, in denen Tangenten eine Rolle spielen, führen auf Differentialgleichungen von diesem Typ. Wir halten noch explizit fest: Die Lösungen von (8.16) sind die Geraden (8.13), – sie bilden die allgemeine Lösung der Differentialgleichung – und die Enveloppe (8.14) dieser Geradenschar – sie ist die singuläre Lösung der Differentialgleichung.

Beispiel Gesucht sind die Kurven, die die Eigenschaft haben, dass ihre Tangenten zusammen mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten ein Dreieck mit Flächeninhalt F bilden (siehe Figur 3).

Die Kurve sei als Graph der Funktion $x \rightarrow y(x)$ gegeben. Die Tangente im Punkte (x, y) stellt sich dann durch

$$(\eta - y) = y'(x)(\xi - x)$$

dar. Die Abschnitte auf den Koordinatenachsen sind

$$-\frac{y}{y'} + x \quad \text{und} \quad -y'x + y .$$

Für die Fläche F des Dreiecks erhält man also

$$2F = \left(x - \frac{y}{y'}\right)(y - y'x) ,$$

und damit ergibt sich, da beim Wurzelziehen gemäss Aufgabenstellung nur das positive Vorzeichen zu berücksichtigen ist,

$$(7.17) \quad y = y'x + \sqrt{-2Fy'} .$$

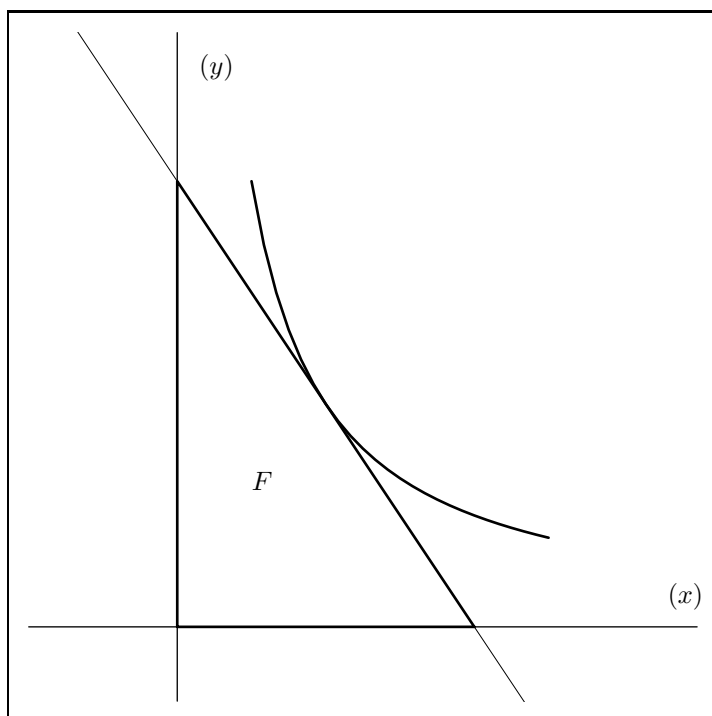


FIG. 3:
Dreieck, das von der Tangenten
an die Kurve und den
Koordinatenachsen gebildet
wird

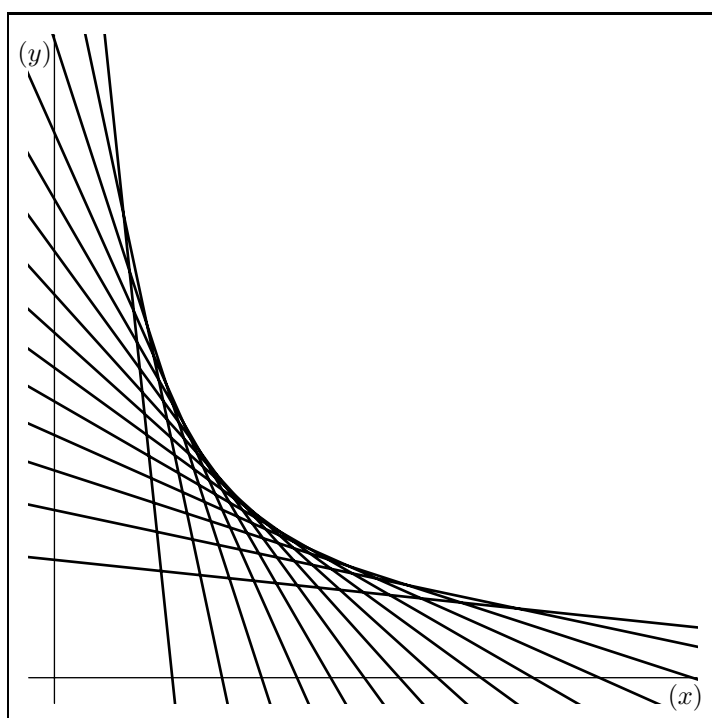


FIG. 4:
Die Geradenschar

$$y = Cx + \sqrt{-2FC}$$

(Die Enveloppe ist sichtbar,
obschon sie nicht
eingezeichnet ist!)

Dies ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung besteht aus der Schar der Geraden

$$(7.18) \quad y = Cx + \sqrt{-2FC}.$$

Daneben besitzt sie eine – interessantere – singuläre Lösung, die durch die Envelope der Geradenschar gegeben ist. Sie wird erhalten, indem man aus (8.18) und der partiellen Ableitung von (8.18) nach C

$$(7.19) \quad 0 = x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-2FC}} (-2F)$$

den Parameter C eliminiert. Aus (8.19) erhält man

$$\begin{aligned} \sqrt{-2FC} &= \frac{F}{x}, \\ C &= -\frac{F}{2x^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (8.18) liefert dann

$$(7.20) \quad y = \frac{1}{2} \frac{F}{x}.$$

Es stellt sich heraus, dass neben der Geraden (8.18) auch die Hyperbel (8.20), genauer deren positiver Ast, die verlangten geometrischen Eigenschaften hat (siehe Figur 4).