

1 Einleitung

Der Zustand eines physikalischen (chemischen etc.) Systems wird durch eine Anzahl von Zustandsgrößen beschrieben (Druck, Lage, Geschwindigkeit, Stromstärke etc.), seine zeitliche Entwicklung durch entsprechende Funktionen der Zeit. Zwischen diesen Zustandsgrößen gibt es i.a. Beziehungen. Zum Beispiel sind Druck, Volumen und Temperatur einer festen Menge Gases durch die Zustandsgleichung des Gases miteinander verbunden. Die wissenschaftliche Erfahrung zeigt nun, dass es oft leichter ist, die zeitliche *Änderung* einer Zustandsgröße, das heisst also deren Ableitung nach der Zeit durch die übrigen Größen und deren zeitlichen Ableitungen zu beschreiben, als diese Zustandsgrößen selbst. Ein konkretes Beispiel zu diesem Sachverhalt liefert das Newton'sche Gesetz (siehe Figur 1). Zwar sind für einen Massenpunkt der Ort $x(t)$, und die Geschwindigkeit $v(t)$ zur Zeit t nicht auf einfache Weise mit den relevanten weiteren Zustandsgrößen 'Kraft', 'Masse' verbunden. Wohl aber ist bekanntlich die Beschleunigung,

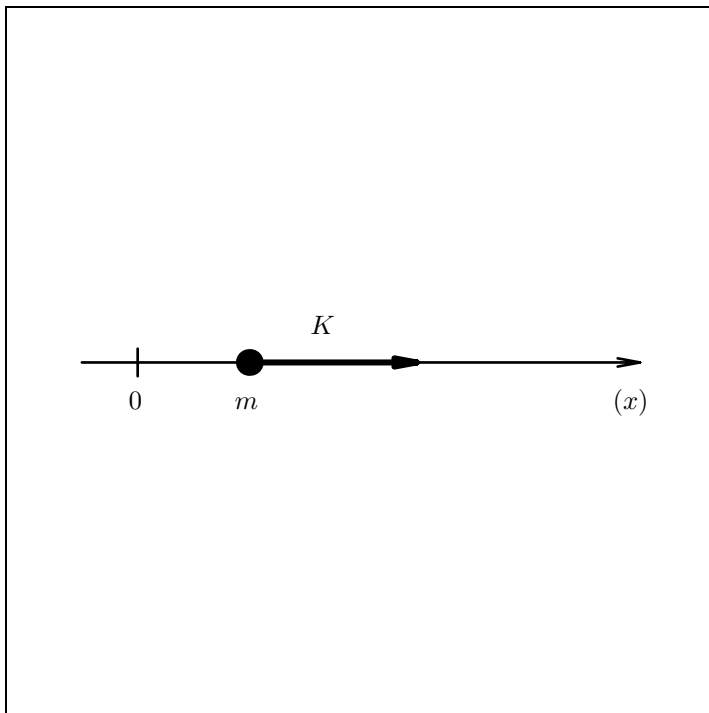


FIG. 1 :
Zum Newton'schen Gesetz

d.h. die zeitliche Ableitung $\dot{v}(t)$ der Geschwindigkeit, bzw. die zweite zeitliche Ableitung $\ddot{x}(t)$ des Ortes eine einfache Funktion der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft. Dieser Sachverhalt wird nach Newton durch die Differentialgleichung

$$(1.1) \quad m\ddot{x} = K$$

oder durch das Differentialgleichungssystem

$$(1.2) \quad \left| \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v \\ m\dot{v} & = & K \end{array} \right|$$

beschrieben.

Mathematisch ist an dieser Stelle wichtig, dass die Differentialgleichung (2.1) bzw. das Differentialgleichungssystem (2.2) die Funktion $t \rightarrow x(t)$ im wesentlichen beschreibt.

In der Tat haben wir bereits in der Analysis I oft darauf hingewiesen, dass Funktionen durch Differentialgleichungen beschrieben werden können. Im Kapitel II, Abschnitt 5 haben wir zum Beispiel die einfache Differentialgleichung

$$(1.3) \quad y' = ay, \quad a \in \mathbb{R}$$

untersucht und gefragt, welche Funktionen $y: x \rightarrow y(x)$ Lösungen dieser Differentialgleichung sind. Wir haben damals gesehen, dass notwendigerweise

$$(1.4) \quad y(x) = C \cdot e^{ax}$$

gelten muss, wobei C eine beliebige Konstante ist. Die Differentialgleichung (2.3) beschreibt also nicht nur *eine* Funktion sondern eine ganze Klasse oder – wie man sagt – eine ganze *Schar von Funktionen*, die durch die Formel (2.4) mit C als *Scharparameter* gegeben wird. Diese Schar heisst die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung.

Auf ähnliche Art liefert die Differentialgleichung (2.1) nicht nur *eine* mögliche Lösung für die Funktion $t \rightarrow x(t)$, sondern sie beschreibt sämtliche Bewegungen des Massenpunktes, die unter den betrachteten physikalischen Bedingungen überhaupt möglich sind. Offensichtlich unterscheiden sich die verschiedenen Lösungen dadurch, dass sie zu verschiedenen Anfangsbedingungen $x(0)$, $\dot{x}(0)$ gehören. Auch die Differentialgleichung (2.1) beschreibt somit eine ganze Schar von Funktionen, wobei hier offenbar *zwei* Scharparameter auftreten.

Das Thema des vorliegenden Kapitels ist es, den Zusammenhang zwischen einer Differentialgleichung und ihrer allgemeinen Lösung näher zu untersuchen.

In konkreten Anwendungsbeispielen interessiert bei Differentialgleichungen zumeist *eine* spezielle Lösung, nämlich diejenige, die zusätzlich gegebene (Anfangs-)Bedingungen erfüllt. Im Falle der Differentialgleichung (2.3) kann diese zusätzliche Bedingung darin bestehen, dass der Funktionswert $y(0)$ festgelegt ist:

$$(1.5) \quad y(0) = A .$$

Damit ist die Lösungsfunktion der Differentialgleichung (2.3) eindeutig bestimmt; es gilt

$$(1.6) \quad y(x) = A \cdot e^{ax} .$$

Wie wir oben gesehen haben, wird im Falle der Differentialgleichung (2.1) die zusätzliche Bedingung am natürlichsten in der Angabe von Ort und Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit 0 bestehen:

$$(1.7) \quad x(0) = x_0 ; \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 .$$

Die physikalische Anschauung zeigt, dass durch die Vorgabe der Grössen x_0 und v_0 die Funktion $t \rightarrow x(t)$ eindeutig bestimmt sein muss.

Wir merken hier bereits an, dass die Grössen A in (2.5) und die Grössen x_0, v_0 in (2.7) offenbar beliebige reelle Zahlen sein dürfen. Dies illustriert einen ganz allgemeinen mathematischen Satz über die Lösungen von Differentialgleichungen (siehe Abschnitt 3).

Als nächstes wollen wir hier die **Terminologie** genau festlegen.

Unter einer **gewöhnlichen Differentialgleichung** für die Funktion $y : x \rightarrow y(x)$ verstehen wir einen Ausdruck der Form

$$(1.8) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 .$$

Die Funktion $y: x \rightarrow y(x)$ heisst **Lösung** der Differentialgleichung (2.8), wenn für alle $x \in D(y)$ gilt

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0,$$

d.h. wenn beim Einsetzen die Gleichung identisch in x erfüllt ist. Die Ordnung der höchsten in (2.8) vorkommenden Ableitung heisst **Ordnung** der Differentialgleichung.

Beispiel Ist ω eine fest vorgegebene reelle Zahl, so ist

$$(1.9) \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Funktion

$$x \rightarrow A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

ist für jede Wahl der reellen Grössen A, B eine Lösung der Differentialgleichung (2.9).

Wir merken abschliessend noch an, dass wir hier nur sogenannte *gewöhnliche* Differentialgleichungen betrachten. Diese unglückliche, aber üblich gewordene Ausdrucksweise besagt, dass nur von Funktionen einer *einzig* Variablen die Rede ist. Es sind daneben natürlich auch Differentialgleichungen für Funktionen von *mehreren* Variablen denkbar, welche *partielle* Ableitungen enthalten. Solche Differentialgleichungen heissen *partiell*. Ein Beispiel dafür ist die früher schon betrachtete *Wellengleichung*. Dabei werden Funktionen $u: (x, t) \rightarrow u(x, t)$ gesucht, welche die (partielle) Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

erfüllen (siehe Kapitel IV, Abschnitt 8). Mit solchen partiellen Differentialgleichungen, deren mathematische Behandlung sehr viel schwieriger ist als die der gewöhnlichen Differentialgleichungen, beschäftigt sich die Lehrveranstaltung Analysis III.