

2 Einige Beispiele

Wir wollen in diesem Abschnitt in einigen konkreten Situationen die dazugehörigen Differentialgleichungen herleiten und versuchen, bereits an dieser Stelle etwas über deren Lösung auszusagen.

(a) Ungestörtes Wachstum

Man stelle sich eine Bakterienkultur oder ganz allgemein eine Population vor, welche im gleichen Zeitraum stets um den gleichen Prozentsatz wächst; man nennt dies ungestörtes, ideales Wachstum. Im Zeitintervall Δt nimmt die Masse $m(t)$ (als Mass der Grösse der Population) um

$$\Delta m = p(\Delta t) \cdot m$$

zu. Daraus folgt

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{p(\Delta t)}{\Delta t} m$$

und durch Grenzübergang für $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man

$$(2.1) \quad \frac{dm}{dt} = a \cdot m ,$$

wobei wir

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(\Delta t)}{\Delta t}$$

gesetzt haben. Da die Population mit der Zeit zunimmt, ist a eine positive Zahl. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wissen wir aus der Analysis I, dass jede Funktion $m: t \rightarrow m(t)$, welche die Differentialgleichung (3.1) erfüllt, von der Form

$$(2.2) \quad m(t) = C \cdot e^{at}$$

ist. In diesem Beispiel ist die natürliche Anfangsbedingung die, dass die Anfangsmasse m_0 ,

$$m(0) = m_0 ,$$

gegeben ist. Die gesuchte Funktion ist somit (siehe Figur 1)

$$(2.3) \quad m(t) = m_0 e^{at} .$$

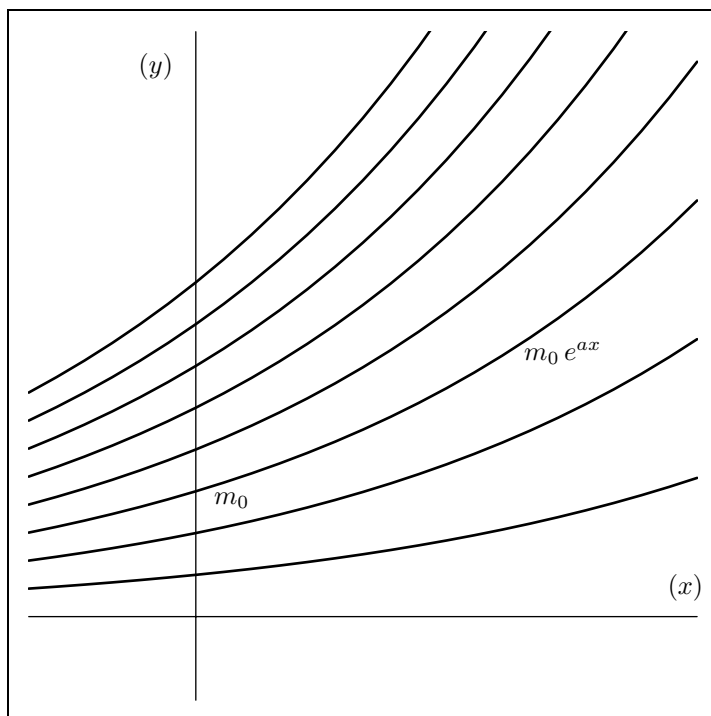


FIG. 1 :
Ungestörtes Wachstum

$$x \rightarrow y(x) = m_0 e^{ax}$$

Andere Beispiele, die durch dieses Modell, d.h. durch die Differentialgleichung (3.1) mit $a > 0$ beschrieben werden, sind: Wirtschaftswachstum, Zunahme des Energieverbrauches, Geldanlage, jeweils mit konstantem Prozent- bzw. Zins-Satz.

(b) Abklingvorgänge

In diesem Beispiel sei $y(t)$ eine Grösse, welche im gleichen Zeitraum stets um denselben Prozentsatz *abnimmt*. Man erhält dann mit der analogen Überlegung wie unter (a) offenbar

$$(2.4) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

mit $k > 0$. Der Proportionalitätsfaktor $-k$ ist negativ. Wie oben gilt

$$(2.5) \quad y(t) = C \cdot e^{-kt}.$$

Lautet die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0,$$

(zur Zeit t_0 sei die Grösse y gerade y_0), so erhält man als Lösung (siehe Figur 2)

$$(2.6) \quad y(t) = y_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}.$$

Dieses Modell beschreibt zum Beispiel die Abkühlung eines Gegenstandes in einem Wärmereservoir von konstanter Temperatur. Die Grösse $y(t)$ ist in diesem Fall die Temperaturdifferenz zwischen Gegenstand und Wärmereservoir.

Ebenso tritt die Differentialgleichung (3.4) beim radioaktiven Zerfall auf. In diesem Fall ist die Grösse $y(t)$ die zur Zeit t vorhandene aktive Masse. In diesem letzten Beispiel, aber häufig auch in den anderen spricht man von der Halbwertszeit; dies ist die Zeit τ , in der die Grösse y auf die Hälfte abnimmt (siehe Figur 3). Es gilt also

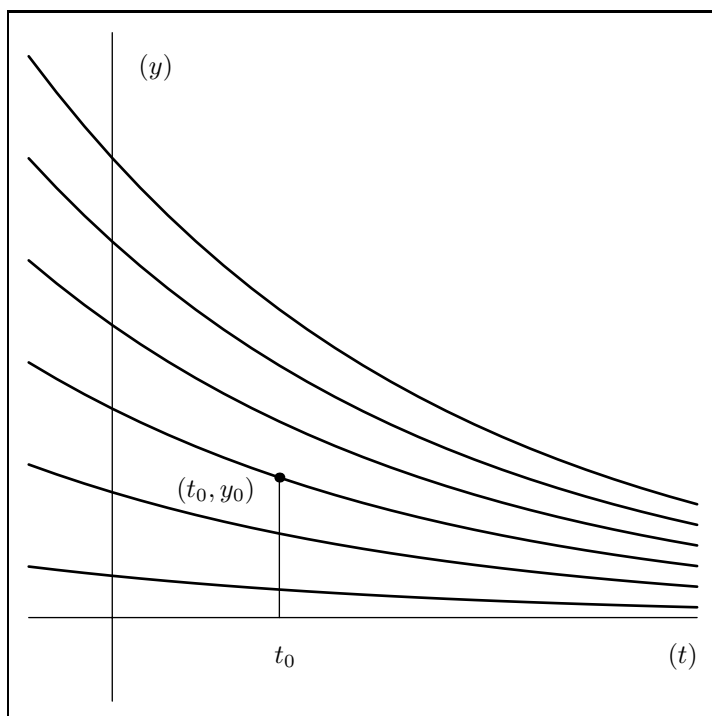


FIG. 2:
Abklingvorgang
 $t \rightarrow y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)}$

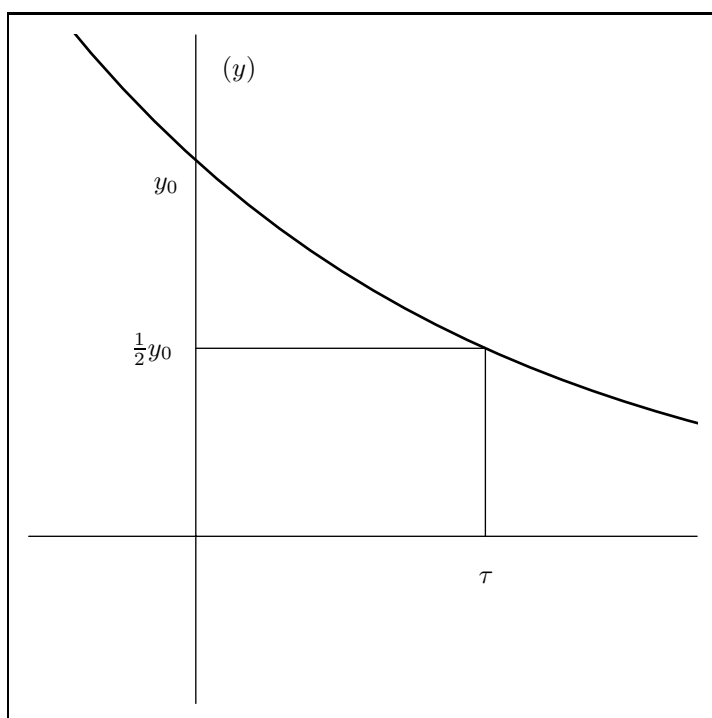


FIG. 3:
Halbwertszeit

$$(2.7) \quad y(\tau) = \frac{1}{2} y(0) .$$

Da laut Voraussetzung die Grösse $y(t)$ im selben Zeitraum immer um denselben Prozentsatz abnimmt, muss τ von der Lage des (Zeit-)Nullpunktes unabhängig sein. Einsetzen von (3.7) liefert

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{-k\tau} ,$$

woraus man erhält

$$\tau = \frac{\log 2}{k} .$$

(c) Einschalten eines elektrischen Stromes

Es sei ein Schaltkreis mit einem Ohm'schen Widerstand R und einer Selbstinduktion L gegeben. Gesucht ist die Stromstärke $I(t)$ zur Zeit t , wenn zur Zeit $t = 0$ an den Schaltkreis eine konstante Spannung U angelegt wird (siehe Figur 4). Die Physik sagt, dass die Funktionen $I : t \rightarrow I(t)$ der Differentialgleichung

$$(2.8) \quad L \frac{dI}{dt} = -RI + U$$

genügt. Setzen wir $f(t) = I(t) - U/R$, so folgt aus (3.8)

$$(2.9) \quad \frac{df}{dt} = -\frac{R}{L} f .$$

Wir sehen, dass f einer Differentialgleichung genügt, die der Differentialgleichung (3.4) entspricht. Danach erhalten wir

$$(2.10) \quad I(t) - U/R = f(t) = C \cdot e^{-(R/L)t} .$$

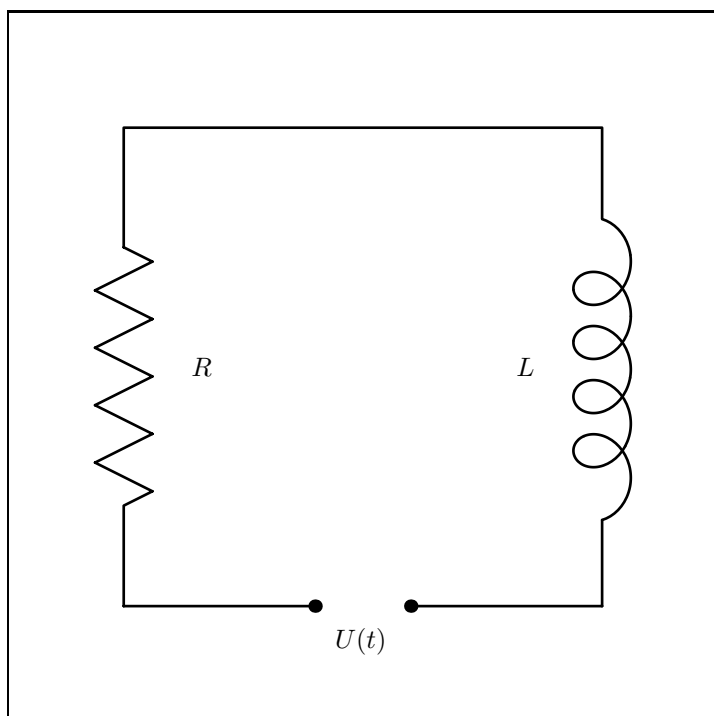


FIG. 4:
Einschaltvorgang in einem
elektrischen Schaltkreis

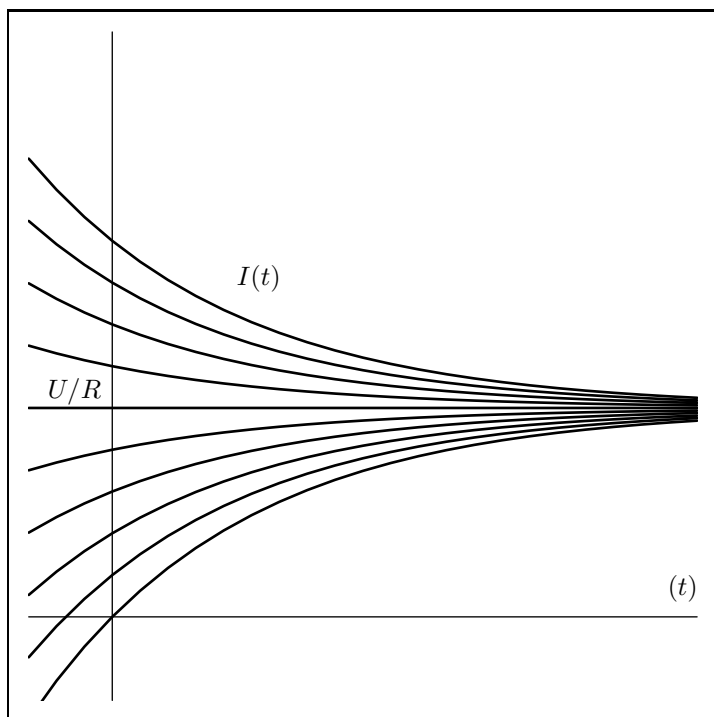


FIG. 5:
Einschaltvorgang; verschiedene
Anfangsbedingungen

$$t \rightarrow \frac{U}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

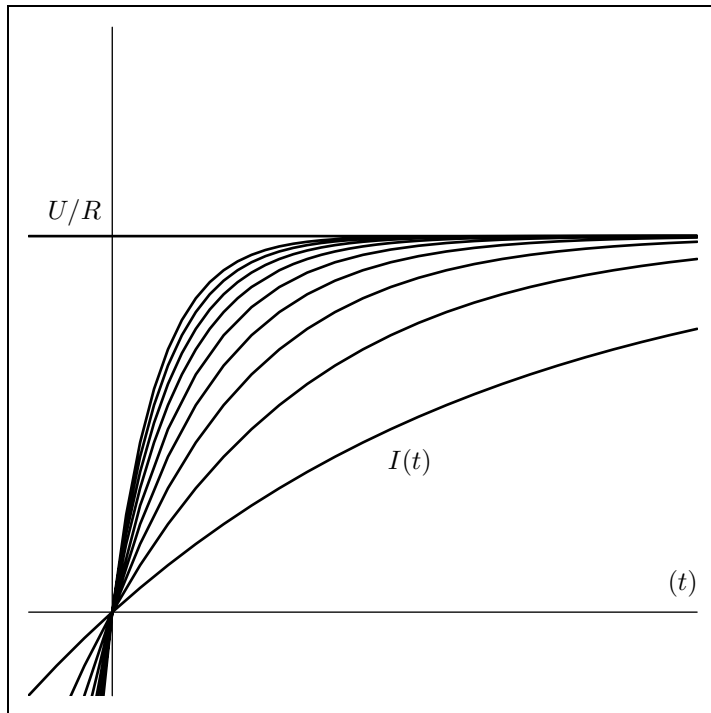


FIG. 6:
Einschaltvorgang; verschiedene
Werte des Parameters L

$$I(t) \rightarrow \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Setzt man die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ein, so erhält man (siehe Figuren 5,6)

$$(2.11) \quad I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) .$$

Es ist klar, dass beim Ausschalten ein entsprechender Vorgang abläuft.

(d) Freier Fall mit Reibung

Ein Massenpunkt der Masse m falle unter dem Einfluss der Schwerkraft; sein Fall werde gebremst durch eine zur Geschwindigkeit proportionalen Kraft (siehe Figur 7). Zur Zeit $t = 0$ sei $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Nach Newton gilt für die Ortsfunktion $t \rightarrow x(t)$ des Massenpunktes die Differentialgleichung

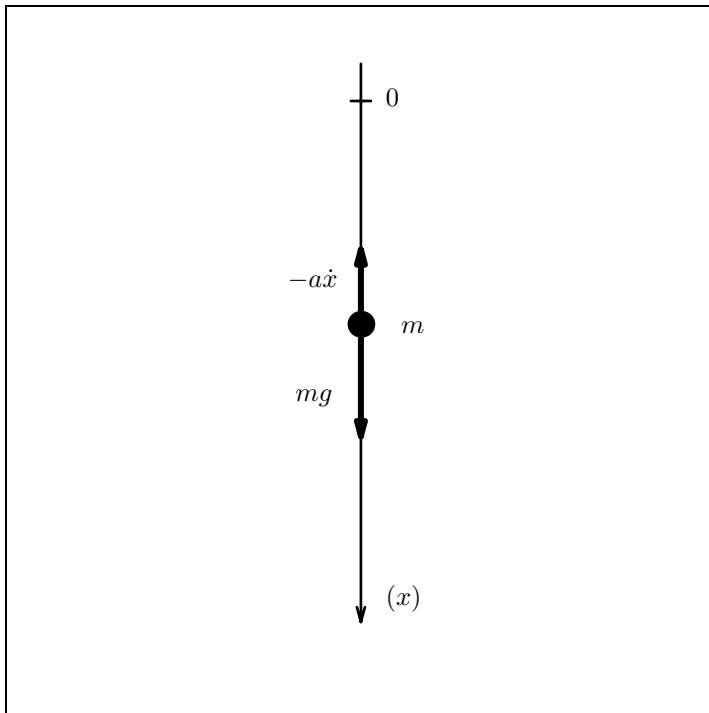


FIG. 7:
Freier Fall mit Reibung

$$(2.12) \quad m \ddot{x} = m g - a \dot{x} .$$

Dies ist, im Unterschied zu den oben behandelten Beispielen, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Setzen wir $\dot{x}(t) = v(t)$, so erhalten wir

$$(2.13) \quad m \dot{v} = m g - a v .$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung für $t \rightarrow v(t)$ entspricht offenbar genau der Differentialgleichung (3.8), wenn $v(t)$ durch $I(t)$, g durch U/L und a/m durch R/L ersetzt wird. Wir können deshalb die Lösung von (3.13) dem vorhergehenden Problem entnehmen; (3.10) liefert

$$v(t) = \frac{m g}{a} + C \cdot e^{-\frac{a}{m} t} .$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ bestimmt C ; wir erhalten (siehe Figur 8)

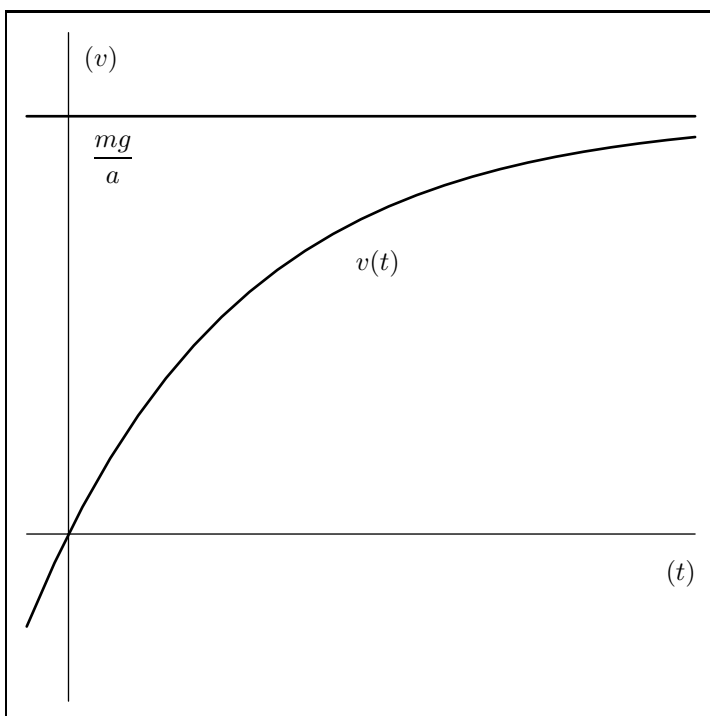


FIG. 8:
Freier Fall mit Reibung; die
Geschwindigkeitfunktion

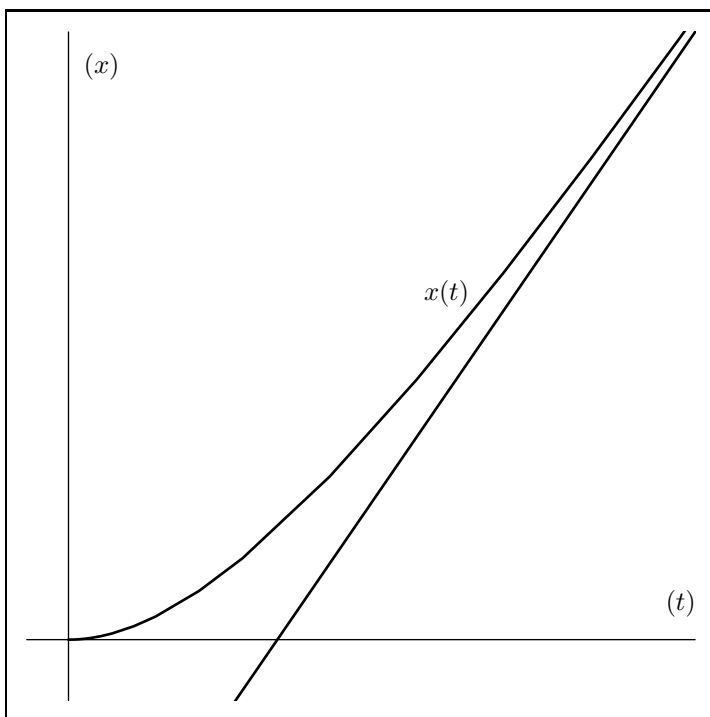


FIG. 9:
Freier Fall mit Reibung; die
Ortsfunktion mit Asymptote

$$x(t) = \frac{mg}{a} \left(t - \frac{m}{a} \right)$$

$$(2.14) \quad v(t) = \frac{mg}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{m} t} \right) .$$

Die Ortsfunktion $x(t)$ berechnet man aus

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

durch einfache Integration. Es ergibt sich

$$(2.15) \quad x(t) = \frac{mg}{a} t + \frac{m^2 g}{a^2} e^{-\frac{a}{m} t} + D .$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert schliesslich (siehe Figur 9)

$$D = -\frac{m^2 g}{a^2} .$$

Die oben beschriebenen Beispiele zeigen, dass die Mathematik mit den Differentialgleichungen ein sehr effizientes Werkzeug bereitstellt, um Modellvorstellungen mathematisch zu beschreiben. Es ist dabei interessant festzustellen, dass ein- und dasselbe Modell, d.h. also ein- und dieselbe Differentialgleichung in ganz verschiedenen Fachgebieten auf natürliche Weise auftaucht. Weiss man über die Lösungsfunktionen der entsprechenden Differentialgleichung Bescheid, so kann die Modellvorstellung im Experiment geprüft werden, und es kann entschieden werden, ob sie “richtig” oder “falsch” ist. Im Zusammenhang mit diesen Wörtern ist es vielleicht angebracht anzumerken, dass mit “richtig” und “falsch” hier keine absolute Wertung vorgenommen wird. Vielmehr stellt das Experiment ja nur fest, in welchen *Grenzen* eine Modellvorstellung zu *brauchbaren*, d.h. für den verfolgten Zweck *genügend genauen* Resultaten führt.