

### 13 Lineare autonome Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare autonome Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Im hier einzig zu behandelnden Fall von zwei Gleichungen sind dies Systeme, die sich in der Form

$$(13.1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases}$$

schreiben lassen. Dabei sind die Koeffizienten  $a_{ik}, b_i$ ;  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, 2$  reelle Zahlen, also insbesondere unabhängig von  $t$ . Wir haben hier eine Bezeichnungsweise gewählt, die von der linearen Algebra her nahegelegt wird. Setzen wir

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

so schreibt sich das System (13.1) in der einfachen Form

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}.$$

Man beachte, dass aus einem System der Form (12.5) ein System der Form (13.1) entsteht, wenn man die auf der rechten Seite stehenden Funktionen *linearisiert*. Diese Tatsache allein liefert sicherlich genügend Motivation, sich mit linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eingehender zu beschäftigen.

Es gibt im wesentlichen zwei Techniken, Systeme der Form (13.1) zu behandeln. Die eine Art verwendet Methoden der linearen Algebra, um die Matrix  $A$  in einem ersten Schritt auf eine einfache Form zu bringen, wenn möglich auf Diagonalforn. Die zweite Art führt das System (13.1) auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurück. Beide Lösungsarten wollen wir an Hand von Beispielen kurz kennenlernen, wobei wir der Einfachheit halber Beispiele wählen, bei denen  $\vec{b}$  trivial ist ("homogener Fall").

**Beispiel** Es sei das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

gegeben. Wir stellen als erstes fest, dass die Matrix  $A$  des Systems

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

symmetrisch ist. Von der linearen Algebra her wissen wir, dass sich symmetrische Matrizen leicht auf Diagonalgestalt bringen lassen, indem man ihre Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet. Für die Matrix  $A$  erhält man die Eigenwerte  $\alpha_1 = -1$  und  $\alpha_2 = 3$  sowie die zugehörigen (orthonormierten und deshalb linear unabhängigen) Eigenvektoren

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Im Falle einer symmetrischen Matrix gibt es bekanntlich immer eine Basis von orthonormierten Eigenvektoren!) Wir führen nun, entsprechend den Eigenvektoren die neuen Funktionen

$$(13.2) \quad \begin{aligned} t &\rightarrow y_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(t) - x_2(t)) \\ t &\rightarrow y_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1(t) + x_2(t)) \end{aligned}$$

ein. (Im Fall einer symmetrischen Matrix  $A$  tritt hier einfach die Matrix auf, deren Zeilen aus den normierten Eigenvektoren gebildet werden; im Fall einer nichtsymmetrischen Matrix  $A$  müssen die Funktionen  $y_1, y_2$  auf etwas kompliziertere Weise gebildet werden.) Eine kleine Rechnung zeigt, dass die Funktionen  $y_1, y_2$  dem Differentialgleichungssystem

$$(13.3) \quad \begin{vmatrix} \dot{y}_1 & = & -y_1 \\ \dot{y}_2 & = & 3y_2 \end{vmatrix}$$

genügen, dessen Matrix Diagonalform hat; in der Diagonalen stehen daher die Eigenwerte  $\alpha_1, \alpha_2$  der Matrix  $A$ . Die Gleichungen des Differentialgleichungssystems (13.3) sind “entkoppelt”; ihre Lösungen lassen sich sofort hinschreiben

$$\begin{aligned} t &\rightarrow y_1(t) = C_1 e^{-t}, \\ t &\rightarrow y_2(t) = C_2 e^{3t}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (13.2) lassen sich dann die ursprünglich gesuchten Funktionen  $x_1, x_2$  angeben:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow x_1(t) = D_1 e^{-t} + D_2 e^{3t}, \\ t &\rightarrow x_2(t) = -D_1 e^{-t} + D_2 e^{3t}, \end{aligned}$$

wobei hier der Einfachheit halber  $D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}C_1, D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}C_2$  gesetzt haben.

Fassen wir zusammen: Man benützt in dieser Lösungsart Methoden der linearen Algebra, um das ursprüngliche System auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Das geschieht, indem man Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$  berechnet und entsprechend neue Funktionen einführt. Das vereinfachte, neue System lässt sich dann leichter lösen. Im letzten Schritt geht man zu den ursprünglich gesuchten Funktionen zurück.

Die zweite Lösungsart illustrieren wir mit dem folgenden Beispiel.

**Beispiel** Es sei das System

$$(13.4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{cases}$$

gegeben. (Wir bemerken, dass für dieses System die erste Methode nicht ohne weiteres zum Ziel führt, da die Matrix  $A$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.) Wir führen das System (13.4) auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung zurück, indem wir eine der unbekannten Funktionen eliminieren. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$(13.5) \quad x_2 = \dot{x}_1 - 5x_1 .$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$(13.6) \quad \dot{x}_2 = -4x_1 + \dot{x}_1 - 5x_1 .$$

Andererseits ergibt die Ableitung von (13.5)

$$(13.7) \quad \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 - 5\dot{x}_1 .$$

Aus (13.6) und (13.7) erhalten wir dann

$$(13.8) \quad \ddot{x}_1 - 6\dot{x}_1 + 9x_1 = 0 .$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\alpha \rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha - 3)(\alpha - 3) ,$$

so dass die allgemeine Lösung von (13.8) durch

$$t \rightarrow x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$$

gegeben ist. Aus (13.5) ergibt sich dann

$$t \rightarrow x_2(t) = (-2C_1 + C_2) e^{3t} - 2C_2 t e^{3t} .$$

Die allgemeine Lösung des Systems (13.4) lässt sich somit in Vektorform

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 - 2t \end{bmatrix} e^{3t}$$

schreiben.

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit dem folgenden Beispiel aus der Physik, das ein Differentialgleichungssystem mit mehr als zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung involviert.

**Beispiel** Es seien zwei identische mathematische Pendel der Masse  $m$  und der Länge  $l$  gegeben. Sie sollen durch eine in der Ruhelage nicht beanspruchten Feder mit Federkonstante  $k$  verbunden sein.

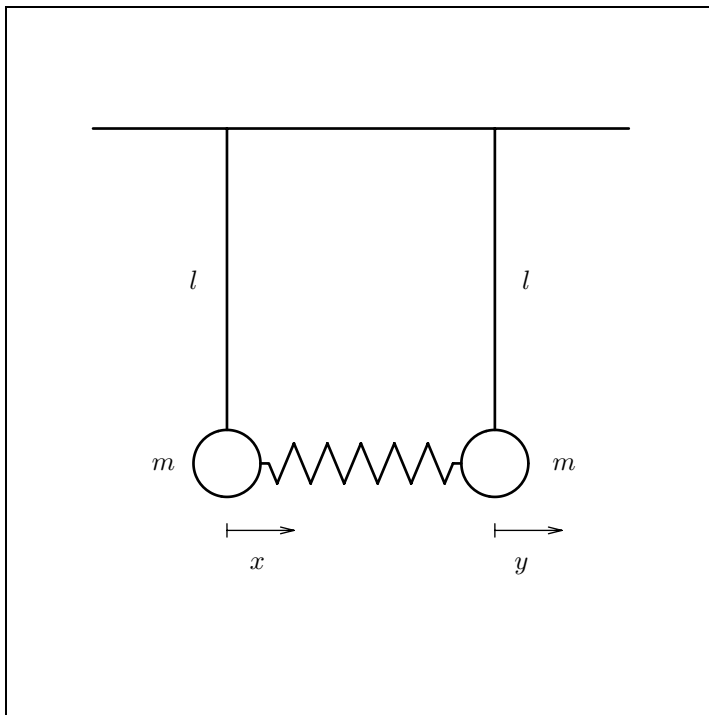


FIG. 1 :  
Gekoppelte Pendel

Wir beschreiben durch  $t \rightarrow x(t)$  die Auslenkung aus der Ruhelage des linken und durch  $t \rightarrow y(t)$  die Auslenkung aus der Ruhelage des rechten Pendels. Von Anfang an beschränken wir uns ausserdem auf die linearisierte Theorie. Das Newton'sche Gesetz liefert sofort die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\frac{mg}{l}x - k(x - y) \\ m\ddot{y} &= -\frac{mg}{l}y - k(y - x) \end{cases}.$$

Dabei bezeichnet  $g$  wie üblich die Erdbeschleunigung. Setzen wir – um die Rechnung zu vereinfachen –

$$(13.9) \quad a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{k}{m},$$

so erhalten wir das lineare Differentialgleichungssystem

$$(13.10) \quad \begin{cases} \ddot{x} &= -(a + b)x + by \\ \ddot{y} &= bx - (a + b)y \end{cases}.$$

Zwar handelt es sich hier um ein Differentialgleichungssystem, in dem zweite Ableitungen auftreten. Führt man aber als neue unbekannte Funktionen die ersten Ableitungen  $\dot{x}, \dot{y}$  ein, so erhält man unmittelbar ein lineares autonomes System von vier Differentialgleichungen für vier unbekannte Funktionen. Zu dessen Lösung stehen uns die beiden oben beschriebenen Wege zur Verfügung. Wir beschreiten hier den zweiten, der darin besteht, dass wir durch Elimination der einen Funktion eine Differentialgleichung 4. Ordnung für die andere Funktion gewinnen. Dabei können wir natürlich direkt vom System (13.10) ausgehen und brauchen nicht zuerst zu einem System erster Ordnung überzugehen. Wir lösen zuerst die erste Gleichung nach  $y$  auf

$$(13.11) \quad y = \frac{\ddot{x}}{b} + \frac{a + b}{b}x.$$

Ableiten nach  $t$  liefert

$$(13.12) \quad \ddot{y} = \frac{\dddot{x}}{b} + \frac{a + b}{b}\ddot{x}.$$

Andererseits liefert die zweite Gleichung des Systems mit (13.11)

$$(13.13) \quad \ddot{y} = bx - \frac{a+b}{b}\ddot{x} - \frac{(a+b)^2}{b}x .$$

Aus (13.12) und (13.13) erhalten wir

$$(13.14) \quad \ddot{\ddot{x}} + 2(a+b)\ddot{x} + (a^2 + 2ab)x = 0 .$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$\alpha \rightarrow \alpha^4 + 2(a+b)\alpha^2 + (a^2 + 2ab) .$$

Es hat vier verschiedene, rein imaginäre Nullstellen

$$(13.15) \quad \begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \pm\sqrt{-a} &=: \pm i\omega , \\ \alpha_{3,4} &= \pm\sqrt{-(a+2b)} &=: \pm i\sigma . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die allgemeine Lösung von (13.14),

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + C_3 \cos(\sigma t) + C_4 \sin(\sigma t) .$$

Die Gleichung (13.11) liefert die zugehörige Funktion  $t \rightarrow y(t)$

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - C_3 \cos(\sigma t) - C_4 \sin(\sigma t) .$$

Betrachten wir zum Schluss noch die Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 ,$$

so erhalten wir für die Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} C_1 + C_3 & = & x_0 \\ \omega C_2 + \sigma C_4 & = & 0 \\ C_1 - C_3 & = & 0 \\ \omega C_2 - \sigma C_4 & = & 0 \end{array} \right| .$$

Dieses liefert sofort  $C_1 = C_3 = x_0/2$ ,  $C_2 = C_4 = 0$ . Die zugehörige Lösung des Systems (13.10) lautet also

$$(13.16) \quad x(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\omega t) + \cos(\sigma t)) \quad ,$$

$$y(t) = \frac{x_0}{2} (\cos(\omega t) - \cos(\sigma t)) \quad .$$

Dabei sind die Kreisfrequenzen  $\omega$  und  $\sigma$  nach (13.15) und (13.9) gegeben durch

$$(13.17) \quad \begin{aligned} \omega^2 &= a = \frac{g}{l} \quad , \\ \sigma^2 &= a + 2b = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m} \quad . \end{aligned}$$

Schliesslich können wir die Formeln von (13.16) mit Hilfe goniometrischer Identitäten in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\sigma - \omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\sigma + \omega}{2} t\right) \\ y(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\sigma - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\sigma + \omega}{2} t\right) . \end{aligned}$$

Ist nun  $k/m$  verglichen mit  $g/l$  klein (“schwache Kopplung”), so ist wegen (13.17) die Differenz  $\sigma - \omega$  ebenfalls klein. Dies bedeutet, dass sich der Faktor  $\cos(\frac{\sigma - \omega}{2} t)$  bzw.  $\sin(\frac{\sigma - \omega}{2} t)$  nur langsam ändert. Die Funktionen  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow y(t)$  können deshalb als Schwingungen mit Kreisfrequenz  $(\sigma + \omega)/2$  und *variabler Amplitude* angesehen werden. Die Amplituden sind durch

$$x_0 \cos\left(\frac{\sigma - \omega}{2} t\right) \quad \text{bzw.} \quad x_0 \sin\left(\frac{\sigma - \omega}{2} t\right)$$

gegeben. Dies beschreibt den “Schwebungscharakter” der Lösung (13.16): die Energie geht periodisch von einem Pendel auf das andere Pendel über.

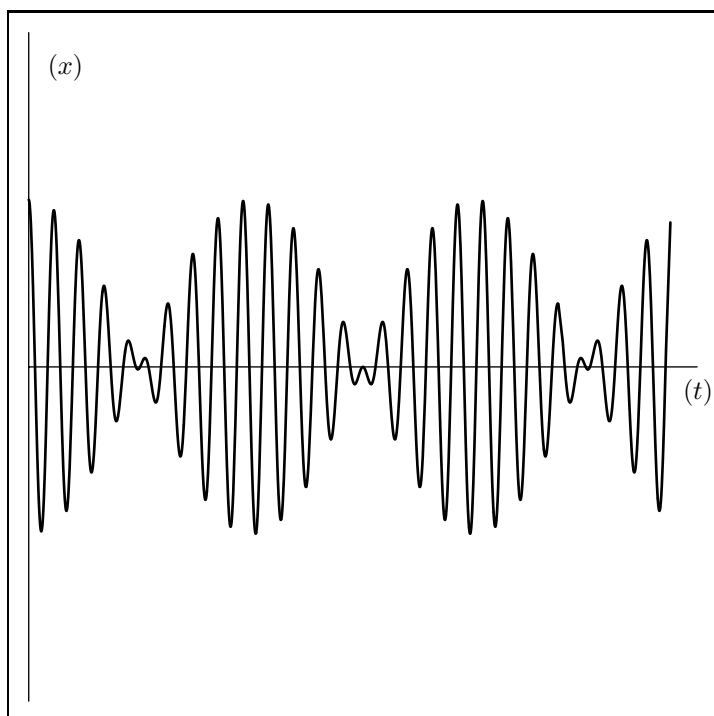


FIG. 2 :  
Die Auslenkung des  
linken Pendels

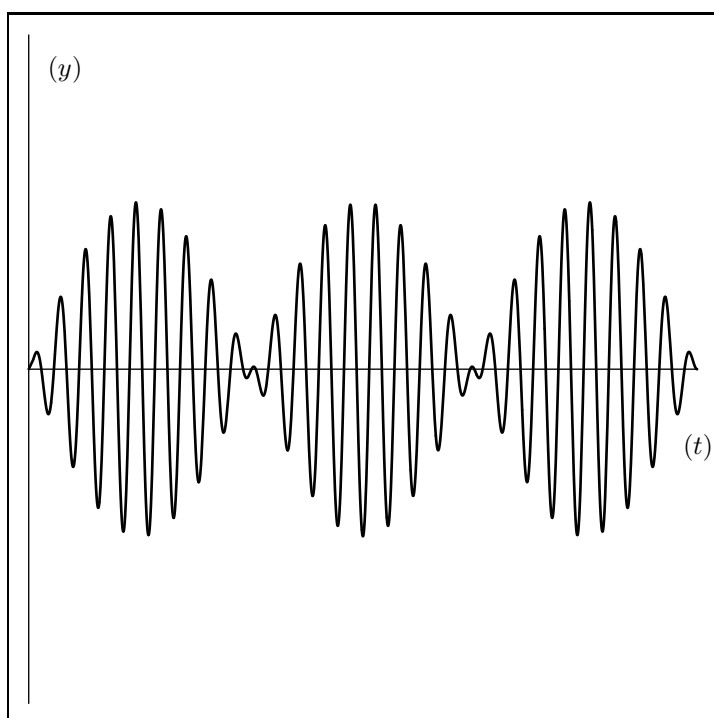


FIG. 3 :  
Die Auslenkung des  
rechten Pendels