

### 3 Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass in Anwendungen oft Funktionen der Zeit gesucht sind, welche durch Differentialgleichungen beschrieben werden. In der Mathematik ist es üblich geworden, nicht  $t$ , sondern  $x$  als Name für die Variable zu benutzen und die gesuchte Funktion durch  $y: x \rightarrow y(x)$  zu beschreiben. Wir wollen uns hier in der allgemeinen Theorie an diese historisch bedingte Konvention halten. Wir gehen aus von einer Differentialgleichung erster Ordnung für  $y: x \rightarrow y(x)$ , von welcher wir annehmen, dass sie in der Form

$$(3.1) \quad y' = f(x, y)$$

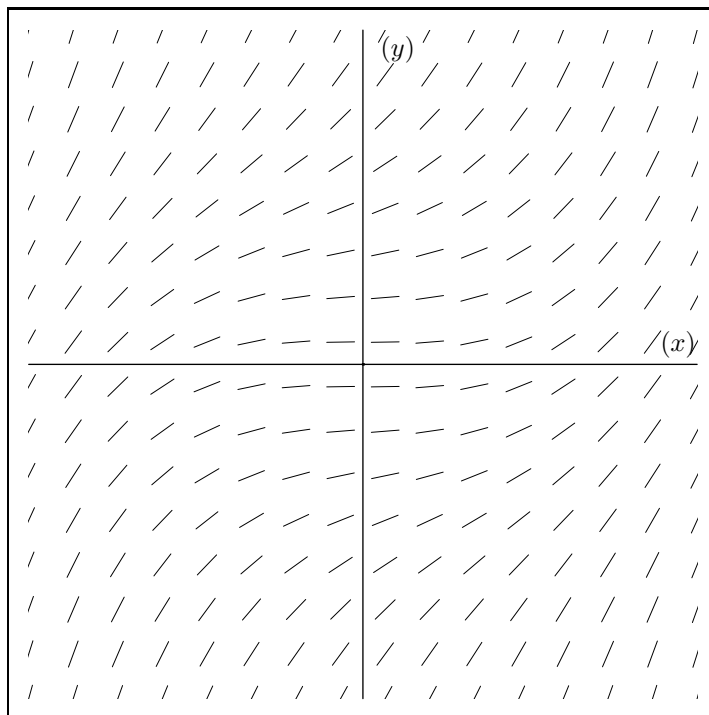


FIG. 1:  
Richtungsfeld der  
Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y^2$$

vorliegt. Anschaulich besteht eine solche Differentialgleichung darin, dass in jedem Punkt des Definitionsbereiches  $D(f)$  die Steigung der durch diesen Punkt gehenden Lösungskurve festgelegt wird. (Unter einer Lösungskurve verstehen wir natürlich den Graphen einer Lösungsfunktion).

Trägt man diese Richtungen in ein  $(x, y)$ -Koordinatensystem ein, so erhält man das **Richtungsfeld** der Differentialgleichung.

**Beispiel** Es sei  $y' = x^2 + y^2$  (siehe Figur 1).

Es wird mit diesem Beispiel klar, dass der Verlauf der Lösungskurven einer Differentialgleichung in grober Näherung aus dem Richtungsfeld abgelesen werden kann. Dies ist im Grunde genommen die Basis von vielen numerischen Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. Plausibel wird damit auch der allgemeine mathematische Satz, welcher über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung der Form (4.1) Auskunft gibt.

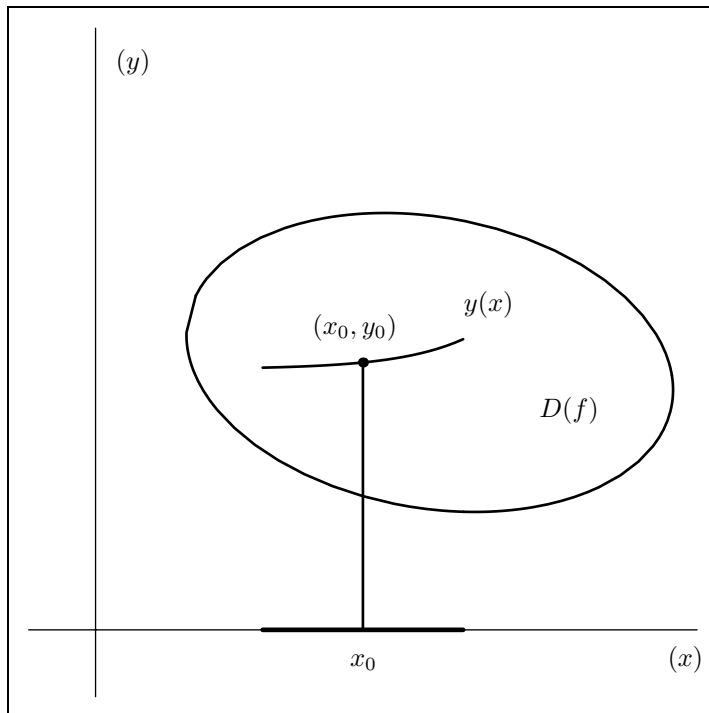


FIG. 2:  
Existenz und Eindeutigkeit  
der Lösung einer Differential-  
gleichung erster Ordnung

**Satz 3.1** Es sei  $f : (x, y) \rightarrow f(x, y)$  in  $D(f)$  stetig und nach  $y$  stetig partiell differenzierbar. Dann gibt es durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  im Innern von  $D(f)$  genau eine Lösungskurve für die Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ . D.h. es gibt eine eindeutig bestimmte, in einem Intervall mit Mittelpunkt  $x_0$  definierte Funktion  $x \rightarrow y(x)$ , welche Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  ist und die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt.

Natürlich verzichten wir in dieser Vorlesung auf den Beweis dieses allgemeinen Satzes. Wir weisen aber darauf hin, dass seine Aussage für alles Folgende grundlegend ist.

**Beispiel** Im Falle der einfachen Differentialgleichung

$$(3.2) \quad y' = ay$$

ergibt sich die Aussage des Satzes aus der Tatsache (die in der Analysis I bewiesen worden ist), dass jede Lösung der Differentialgleichung (4.2) von der Form

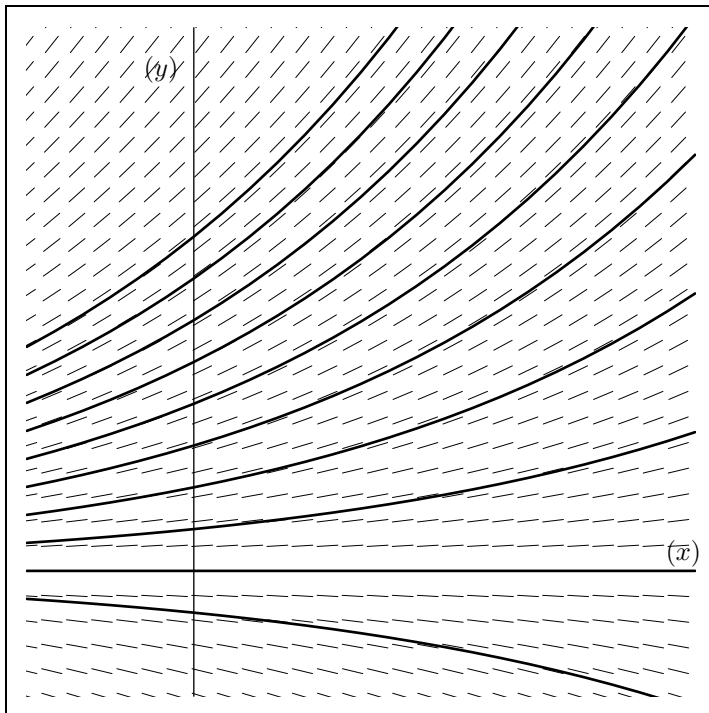


FIG. 3:  
Richtungsfeld und  
Lösungskurven der  
Differentialgleichung

$$y' = ay$$

$$x \rightarrow y(x) = C \cdot e^{ax}$$

ist. Die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  bestimmt dann eindeutig die Konstante  $C$ , so dass

$$y(x) = (y_0 \cdot e^{-ax_0}) \cdot e^{ax}$$

die durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  verlaufende Lösungskurve beschreibt (siehe Figur 3).

Natürlich kennt der Mathematiker Verschärfungen des Satzes 3.1; insbesondere kann er über die Grösse des Definitionsintervalles der gesuchten Funktion weitere Aussagen machen. Dies soll

uns hier nicht weiter interessieren. Hinweisen möchten wir aber speziell auf den Teil des Satzes, welcher von der *Eindeutigkeit* der Lösung handelt. Das untenstehende Beispiel zeigt, dass erst die etwas aus dem Rahmen fallende Voraussetzung über die partielle Ableitung von  $f$  nach  $y$  die Eindeutigkeit der Lösung erzwingt. Nun hat aber gerade diese Eindeutigkeit viele wichtige Konsequenzen, welche der Anfänger gerne übersieht. Zum Beispiel ist es ja erst aufgrund dieser Tatsache überhaupt *möglich*, die Lösungskurven durch den vorgegebenen Punkt  $(x_0, y_0)$  etwa mit Hilfe numerischer Verfahren zu berechnen; wäre die Lösungskurve *nicht* eindeutig bestimmt, so müssten numerische Lösungsverfahren naturgemäss versagen (oder wesentlich komplizierter konzipiert sein). Auch für den Praktiker ist also die volle Schärfe des Satzes 3.1 von Interesse.

**Beispiel** Es sei die Differentialgleichung

$$(3.3) \quad y' = \sqrt[3]{y^2}$$

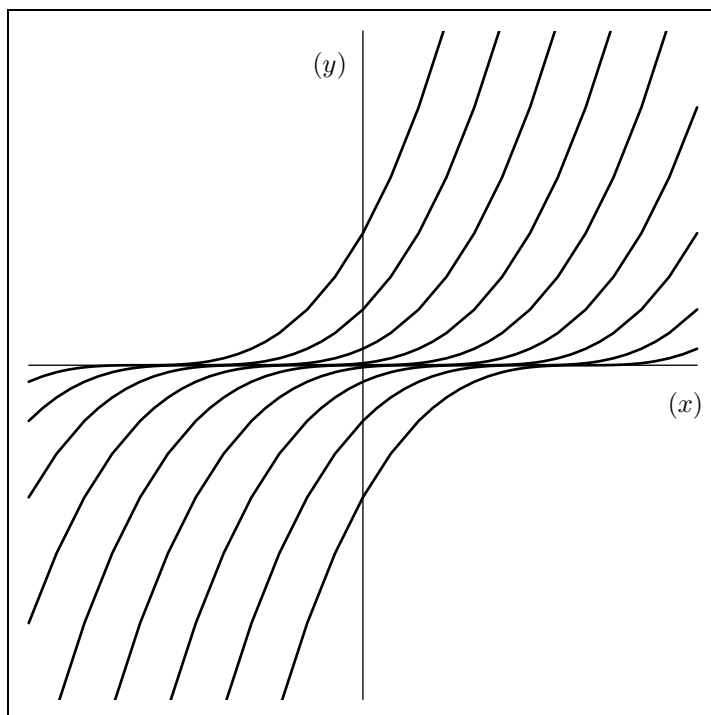


FIG. 4:  
Nichteindeutigkeit der Lösungen  
der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

gegeben. Die Funktion  $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$  ist in der ganzen Ebene definiert. Die partielle Ableitung nach  $y$ ,

$$f_y(x, y) = \frac{2}{3} y^{-1/3}$$

existiert aber für Punkte der  $x$ -Achse nicht. Damit ist die Voraussetzung des Satzes in diesen Punkten verletzt und in der Tat gilt die Aussage des Satzes für Anfangsbedingungen der Form  $y(x_0) = 0$  nicht. Um dies einzusehen, stellt man fest, dass offenbar jede Funktion der Form

$$(3.4) \quad x \rightarrow y(x) = \left( \frac{x-C}{3} \right)^3, \quad C \in \mathbb{R}$$

die Differentialgleichung erfüllt. Ferner erfüllt auch die Nullfunktion  $y \equiv 0$  die Differentialgleichung. Durch jeden Punkt der  $x$ -Achse gibt es somit unendlich viele Lösungskurven. (Weshalb “unendlich viele” und nicht nur “zwei”?) Natürlich *gilt* die Aussage des Satzes, wenn man die Differentialgleichung (4.3) in einem Gebiet betrachtet, welches die  $x$ -Achse ausschliesst (siehe Figur 4).

Als Anwendung unseres Satzes betrachten wir zuerst die folgende allgemeine Situation. Es sei

$$\vec{v}: (x, y) \rightarrow \vec{v}(x, y)$$

ein ebenes Vektorfeld.

Es sei  $P = (x_0, y_0)$  ein Punkt des Definitionsbereiches  $D(\vec{v})$  von  $\vec{v}$ . Wir stellen die durch  $P$  gehenden Feldlinien des Vektorfeldes  $\vec{v}$  als Graph einer Funktion  $y: x \rightarrow y(x)$  dar. Es gilt also  $y(x_0) = y_0$ , und der Zeichnung (siehe Figur 5) entnehmen wir, dass in jedem Punkte der Feldlinien gilt

$$y'(x) = \frac{v_2(x, y(x))}{v_1(x, y(x))}.$$

Dies besagt, dass die Funktion  $y: x \rightarrow y(x)$  Lösung der *Differentialgleichung*

$$(3.5) \quad y' = \frac{v_2(x, y)}{v_1(x, y)}$$

ist. Unser allgemeiner Satz liefert die Aussage, dass durch jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  genau eine Feldlinie des Vektorfeldes  $\vec{v}$  verläuft, falls die auf der rechten Seite der Gleichung (4.5) stehende Funktion von  $x$  und  $y$  stetig ist und nach  $y$  stetig partiell differenzierbar ist. Insbesondere muss natürlich gelten  $v_1(x, y) \neq 0$ .

**Beispiel** Das Vektorfeld  $\vec{v}$  sei gegeben durch  $\vec{v}(x, y) = (y, x)$ . Die Differentialgleichung der Feldlinien lautet somit

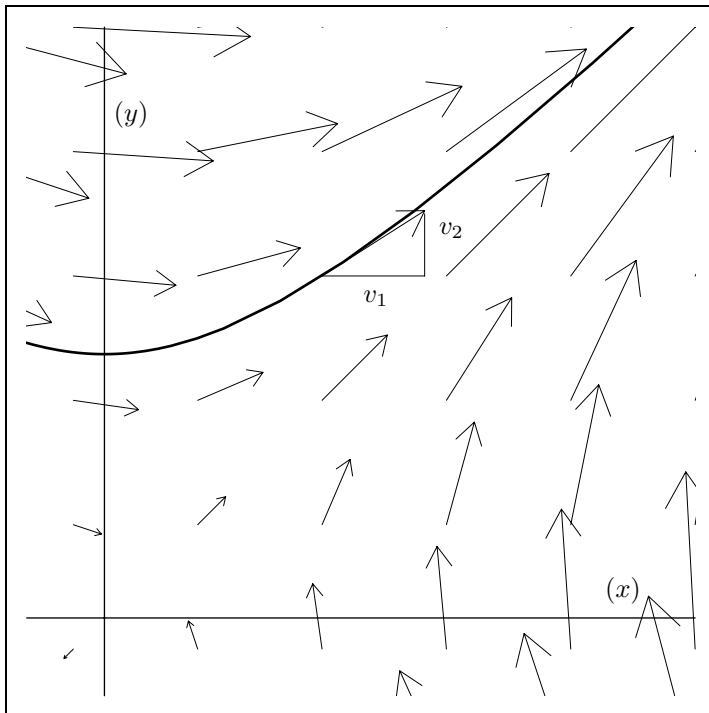


FIG. 5:  
Feldlinien eines Vektorfeldes

$$y' = \frac{x}{y} .$$

Schreiben wir diese Gleichung für  $x \rightarrow y(x)$  in der Form

$$y(x) y'(x) = x ,$$

so erhalten wir durch Integration nach  $x$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C ,$$

wobei  $C$  eine Integrationskonstante ist. Es gilt also die Beziehung

$$y^2 - x^2 = 2C .$$

Die Feldlinie durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  erfüllt zusätzlich die Bedingung  $y_0^2 - x_0^2 = 2C$ , so dass wir dafür die Gleichung

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2$$

erhalten. Für jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  mit Ausnahme der Punkte der  $x$ -Achse sind die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt, und unser Satz liefert genau eine Feldlinie, welche durch  $(x_0, y_0)$  geht.

Die Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung

$$(3.6) \quad y' = f(x, y)$$

heisst deren *allgemeine Lösung*. Wiederum ist Terminologie historisch bedingt, sie ist aus heutiger Sicht ziemlich unglücklich. – Nach unserem Satz 3.1 gibt es unter den dort angegebenen Voraussetzungen zu jeder Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  eine eindeutig bestimmte Lösung. Geometrisch bedeutet dies, dass es zu jedem Punkt  $(x_0, y_0)$  eine eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (3.6) gibt, deren Graph durch diesen Punkt geht. Der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung entspricht folglich eine Schar von Kurven. Halten wir  $x_0$  fest, so sind die einzelnen Kurven dieser Schar durch den einzigen Parameter  $C = y_0$  festgelegt; durch jeden Punkt geht genau eine Kurve der Schar. Eine einparametrische Kurvenschar mit dieser Eigenschaft heisst auch etwa *regulär*. Unter den Bedingungen unseres Satzes ist somit die Schar der Lösungskurven der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  eine **einparametrische reguläre Kurvenschar**.

Umgekehrt kann man fragen, ob zu einer gegebenen einparametrischen Kurvenschar eine Differentialgleichung 1. Ordnung existiert, die diese Schar als Lösungskurven besitzt. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, auf die wir hier nicht eingehen, ist dies in der Tat der Fall. Wir illustrieren den Sachverhalt an einem Beispiel.

**Beispiel** Gegeben sei die Schar der Kreise, welche die  $x$ -Achse in 0 berühren (siehe Figur 6).

Wählen wir den Radius  $C$  als Parameter, so stellt sich diese Schar durch die Gleichung

$$(3.7) \quad x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

dar. Daraus erhält man sofort

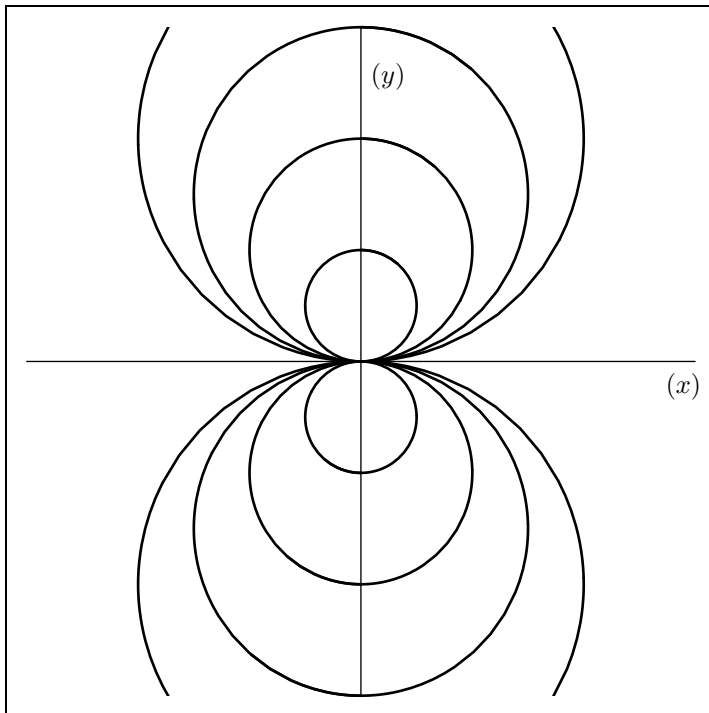


FIG. 6:  
Die Schar der Kreise, welche die  
 $x$ -Achse im Ursprung berühren

$$(3.8) \quad x^2 + y^2 - 2Cy = 0 .$$

In der Umgebung eines Punktes  $(x_0, y_0)$  werde der durch diesen Punkt gehende Kreis als Graph der Funktion  $y : x \rightarrow y(x)$  beschrieben. Dann folgt mit Ableitung nach  $x$

$$(3.9) \quad 2x + 2yy' - 2Cy' = 0 .$$

Elimination von  $C$  aus (4.8) und (4.9) liefert die von  $C$  unabhängige, d.h. für alle Kurven der Schar gültige Beziehung

$$(3.10) \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} .$$

Dies ist die Differentialgleichung, welche die Kurvenschar (4.7) als allgemeine Lösung besitzt; man sagt kurz, es ist die Differentialgleichung der Kurvenschar (4.7). Dies kann man entweder durch Auflösen von (4.7) nach  $y$  und Einsetzen in (4.10) verifizieren oder durch direktes Lösen der Differentialgleichung (4.10). Für letzteres liefert der nächste Abschnitt die Grundlagen.