

Frage 1, Lineare Differentialgleichungen I

Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

A $(y' - 2)^2 = y$

B $y'' + \frac{y'}{1 - x^2} + \frac{y}{1 + x} = \frac{1}{x^2}$

C $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

D $y'' + y' + y^2 = 0$

E $y = xy' + (y')^2$

Frage 1: Lineare Differentialgleichungen I

Antworten:

A: Nein, die Differentialgleichung A ist nicht linear

B: Ja, die Differentialgleichung B ist linear: Die linke Seite ist ein linearer Ausdruck in y und seinen Ableitungen.

C: Nein, die Differentialgleichung C ist nicht linear. Man stellt ferner fest, dass die rechte Seite als Funktion von y/x geschrieben werden kann; die Differentialgleichung lässt sich somit durch eine Substitution auf eine separierbare zurückführen.

D: Nein, die Differentialgleichung D ist nicht linear.

E: Nein, die Differentialgleichung E ist nicht linear. Man stellt ferner fest, dass es sich um eine Clairaut'sche Differentialgleichung handelt.

Frage 2

Lineare Differentialgleichungen II

Gegeben ist eine lineare und homogene Differentialgleichung, welche $y : x \rightarrow \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- A $x \rightarrow \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.
- B $x \rightarrow \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.
- C $x \rightarrow 2 \sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

Frage 2: Lineare Differentialgleichungen II

Antworten:

A: Nein, diese Aussage ist falsch; z.B. ist die Differentialgleichung $y' = \cos x$ linear und homogen. Sie hat $\sin x$ als Lösung, aber $\sin 2x$ ist nicht Lösung.

B: Nein, diese Aussage ist falsch; z.B. ist die Differentialgleichung $y' = \cos x$ linear und homogen. Sie hat $\sin x$ als Lösung aber $\cos x$ ist nicht Lösung.

C: Ja, diese Aussage ist richtig: Jede Linearkombination (also insbesondere jedes Vielfache) der Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung (gleich welcher Ordnung) ist wiederum eine Lösung.

Frage 3**Lineare Differentialgleichungen III**

Gegeben sei eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit Störglied $q(x)$, also z.B.

$$y'' + x^2 y' + (\sin x)y = q(x) .$$

Es sei $y_0 : x \rightarrow y_0(x)$ eine Lösung. Kann daraus in einfacher Weise eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 3q(x)$$

konstruiert werden? Und, falls ja, wie? Man klicke die **richtige** Aussage an.

- A** Nein. Dies ist nicht in einfacher Weise möglich.
- B** Ja, die Funktion $x \rightarrow (y_0(x))^3$ ist eine Lösung.
- C** Ja, die Funktion $x \rightarrow 3y_0(x)$ ist eine Lösung.
- D** Ja, die Funktion $x \rightarrow 3xy_0(x)$ ist eine Lösung.

Frage 3: Lineare Differentialgleichungen III

Antworten:

A: Doch, eine Lösung der neuen DG ist einfach hinzuschreiben.

B: Nein, die dritte Potenz ist keine Lösung der neuen DG.

C: Ja, dies ist die richtige Antwort: direktes Einsetzen liefert die Bestätigung. Übrigens gilt allgemeiner bei inhomogenen *linearen* DGs: Die Superposition von Störgliedern führt zur Superposition der entsprechenden Lösungen.

D: Nein, die angeführte Funktion ist keine Lösung der neuen Differentialgleichung.