ANALYSIS I & II ZUSAMMENFASSUNG

Teresa Sánchez-Robles Herrero @therrero

1. FUNKTIONEN

Gerade Fkt. y-Sym — Gerade: 0, 2, 4, 6 …
un Fkt. (0,0)-Sym

Definitionen:

implizit: $ax+by=cz+d$ / $F(x,y,z)=0$, nicht nach einer Variabel aufgelöst
→ $z=f(x,y)=ax+by$, nach einer der Variabeln aufgelöst

- Explizit: $a_n = 2n+1$, $\{n=0,1,2,3\}$ gelöst
- Rekursiv: $a_1 = 3$, $\boxed{a_{n+1}} = a_n + 3$ (vom vorher. Glied abhä.)
- Beschränkt: Bild in endlichen, breiten, waagerechten Streifen, $\boxed{r \le a_n \le s}$
- Monoton wachsend: $\boxed{a_n \le (<)\ a_{n+1}}$
- Monoton fallend: $\boxed{a_n \ge (>)\ a_{n+1}}$
- Konvergent: nähert sich konst. Wert
- Divergent: nicht konvergent

Eigenschaften:

- Monoton + beschränkt → konvergent
- Nicht beschränkt → divergent (kein Limes)
- Konstant → monoton wachsend + fallend
- Konv. Folge → nicht gegen mehr als 1 Wert konver.
- Konv. Folge minus Grenzwert = Nullfolge
- Konvergenz → Beschränktheit

Zur Untersuchung Folgen/Reihen ⇒ konv./diver.?

Folge → Reihe → konvergiert / divergiert — Abhängig von Sn (Part. summe)

$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3 — $\sum_{n=1} a_n$: $a_1+a_2+a_3$

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
…

Eigenschaften:

$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = a}$ ⇒ konv.

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$ ⇒ $\sum$ konv.

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0}$ ⇒ $\sum$ div.

Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

(I) $= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

(II) Sn: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, $S_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

(III) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \lim \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] = 1$ (→0) konvergiert

Spezielle Reihen

Startwert, Diff. der Folgeglieder

Arith. Folge: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ Summe

Arith. Reihe: $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d = n\frac{a_1 + a_n}{2}}$

Geom. Folge: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ Multiplikation, q: konst. Faktor

Geom. Reihe: $\boxed{s_n = \sum_{k=m}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}}$

↳ zur Konv./Div.: Falls …

1. $-1 < q < 1$ ⇒ $r^n \to 0$, $n \to \infty$ ⇒ konv. gegen $\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$
2. $q \ge 1$ ⇒ dive. ($0 \le S < 1 \to$ div)

Harm. Reihe: $\boxed{s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}}$ Falls $s > 1$ ⇒ konv. gegen ein Wert; $s \le 0 \to$ div.; $s=1 \to$ nicht def.

↳ gilt für $\int_a^\infty f(x)dx$ wenn $\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx$ Form hat

Kriterien

$\lim_{n\to\infty}$ ⇒
- $\lim > 1$ oder ∞ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ⇒ div (53)
- $\lim < 1$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ⇒ konv.
- $\lim = 1$ ⇒ nicht def.

- Quotientenkriterium: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ — Δ $a^{n+1} = a^n a^1$
- Wurzelkriterium: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

- $\sum b_n$ kon, $a_n \le b_n$ ⇒ $\sum a_n$ kon
- $\sum b_n$ div, $a_n \ge b_n$ ⇒ $\sum a_n$ div
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ⇒ beide kon/div

- Vergleichkriterium: $\boxed{\frac{1}{n}}$ ⇒ div; $\boxed{\frac{1}{n^p}}$ ⇒ $p > 1$ ⇒ kon., $p < 1$ ⇒ div; $\boxed{\frac{1}{p^n}}$ ⇒ kon

Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3} \le \frac{5}{2n^2}$ (an) Δ "mächtigste Fak."; konv. auch!

$\le \sum \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum \frac{1}{n^2}$ ⇒ konv

(51) Rechenregeln für Folgen
(52) Grenzwerte spezieller Zahlenfolgen

GRENZWERTE & STETIGKEIT

Stetigkeit: Zusammenhängende Kurve (keine Sprünge) — stetig / stet. / nicht stet.

$\boxed{\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)}$ (54)

Diffbare Fkt: Eigenschaft sich lokal an Punkt approxim. zu lassen

- Jede diff'bare Fkt ist stetig (nicht andersr.)
- Grundlegende Fkt sind stetig + diffbar auf D(f)

Grenzwerte von Funktion (Folgen analog)

$\boxed{\lim_{x\to\infty} x = \infty \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$

- e/ln wächst schneller/langsamer als jede Potenz!

$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a} = \infty \quad \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad \frac{x}{\ln(x)} = 0 \quad \lim_{x\to 0} x^a \cdot \ln(x) = 0}$

Grenzwerte berechnen B.H. S.61 unten

- Regeln ( ) — Regeln aufpassen, Wann Verwenden

Vereinfachen und einsetzen → fertig

für $\lim_{x\to a} f(x)$: $\frac{b}{0}$ → Asymptote; b → fertig; $\frac{0}{0}$ → Ausklammern und kürzen, trig. Identit. z.B. cos/sin, Faktorisieren, bionomische Formeln, Substitu. ($\lim_{x\to a} \Rightarrow \lim_{y\to 0}$, $\lim_{x\to\infty} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}$), z.B. Wurzeln

$\lim f(x)+g(x) = \lim f(x) + \lim g(x)$

falls $\frac{\infty}{\infty}$ / $\frac{0}{0}$ / $0\cdot\infty$ / $\infty\cdot\infty$ / $-\infty\infty$ / $-\infty\cdot\infty$ / … → Bernoulli-L'Hospital (evt. mehrmals) bis $\lim \frac{f(x)}{a}$, a→konst.

für $\lim_{x\to\infty} f(x)$ → Brüche
- durch größte Potenz Nenners teilen
- Bernoulli
- Partialbruchzerlegung
- Substi. $y = \frac{1}{x}$ ($\lim_{x\to\infty} \to \lim_{y\to 0}$)
- Sandwichsatz

→ Betrag

$\lim_{x\to 1^-} |x-1| = \lim_{x\to 1} -(x-1)$

$\lim_{x\to 1^+} |x-1| = \lim_{x\to 1} x-1$

Nützliche Grenzwerte von Fkt (S2, 61)

- $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} x^a \cdot \ln^b x = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^x$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin x} = a$
- $\lim_{x\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e^2}$
- $\lim \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x} = \pm\infty$

Bsp. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(6x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(6x)}{\cos(6x)\sin(2x)}$

$= \sin(6x) \cdot \frac{1}{\cos(6x)\sin(2x)}$

$= \frac{\sin(6x)}{6x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(6x)} \cdot \frac{6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

GRÖßENORDNUNG VON FKT

$x \to \infty$: $=0 \Rightarrow f(x) = o(g(x))$; $=k, k\ne 0 \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ / ⇒ $f(x) = o\,g(x)$ [g(x) hat höh. Ordn.] ≙ wächst schneller; konst
- e wächst schneller als jede Potenzfkt. $x^k = o(e^x)$
- log wächst langsamer als jede Potenzfkt. $\log x = o(x^k)$
- neg. Exponen Potenzfkt wächst schneller als e. $e^{-x} = o(x^{-k})$

$x \to a^+$

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = o\,g(x)$ [g(x) hat höh. Ordn.] ≙ wächst schneller
- $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le A \in \mathbb{R} \iff f(x) = O(g(x))$
- $\log(x) = o(-x^{-k})$ — $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{-x^{-k}} = 0$

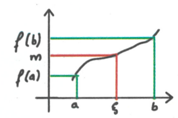
Δ Gültig also: O oder a^+

für $x \to \infty$: $\boxed{x^h} < \boxed{k^x} < \boxed{x^x} < \boxed{x!}$ — $\log(x) \ll x^h \ll e^x$

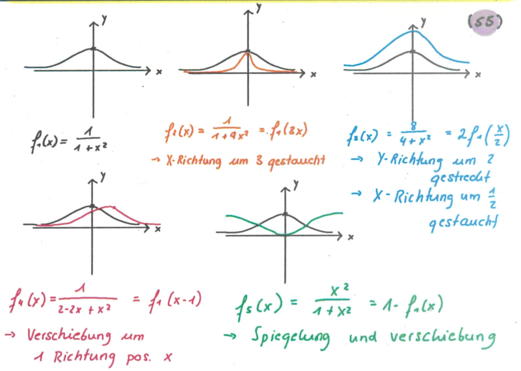
ZWISCHENWERTSATZ

Ist $f: [a,b]$ stetig, so nimmt $f(x)$ jedem Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

⇒ Stetigkeitsnachweis beantwortet Frage: Gibt es ein x mit $f(x) = 6$?



KOORDINATENTRANSFORMATION (55)



Allg. $\boxed{f(x) = a \cdot \sin(bx+c) + d}$

- a: Streckung: Definiert obere/untere Y-Grenze
- b: Veränderung Periodenlänge $\boxed{p = \frac{2\pi}{b}}$
- c: Verschiebung in X-Richtung $\pm\frac{c}{b}$
- d: Verschiebung in y-Richtung, $d > 0$ ↑, $d < 0$ ↓

DIE INVERSE FUNKTION

Relationen (13)

Scanline in definierte Wertebereich W(f) auf Y, mindestens 1 NS [0,+∞) → surj.

- **Injektiv:** Für jeden Y-Wert gibt es höchstens einen X-Wert

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

[0,+∞) auf Y Scanline max 1 NS, y=0, 0 NS → injekt

- **Surjektiv:** Jedes Element $y \in W(f)$ gibt es mindestens einen Y-Wert; $y \in W(f)$; $x \in D(f)$
- **Bijektiv:** Injektiv + Surjektiv — Scanline NS immer 1 → bi

	Injektiv	nicht injektiv
Surjektiv	$x_1 = x_2$, $D = [0, \infty]$, Bijektiv	$x_1 \neq x_2$, $D = [\infty^+, \infty^+]$
nicht surjektiv	$x_1 = x_2$, $D = \mathbb{R}$	

- Durch Einschränken D(f)/W(f) kann Fkt injektiv/surjektiv gemacht werden
- Jede s.m. wachsende/fallende Fkt ist injektiv

Inverse Funktion / Umkehrfunkt.

- Vorraussetzung: $f(x)$ muss bijektiv sein

$f^{-1}: B \to A$ mit $y = f(x)$; $f^{-1}(y) = x$

$B = W(f) = D(f^{-1})$ / $A = D(f) = W(f^{-1})$

- Vorgehen:
  1. Bijektivität zeigen
  2. Gleichung $f(x)$ nach x auflösen
  3. Vertauschen von x und y

Spiegelung

X-Achse $\longrightarrow \cdot -1$

Y-Achse $\longrightarrow x \to -x$

ASYMPTOTEN (66)

$g(x)$ ist Asymp. zu $f(x)$, wenn: $\boxed{\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0}$

A) Brüche (51)

- senk. Asymp. ⇒ D(f) Nenner
- waag. Asymp. ⇒ $N(x) > Z(x)$: x-Achse

⇒ $N(x) = Z(x)$: Zahl vor dem x

- Schiefe Asymp. / Asymp. Kurve ⇒ $Z(x) > N(x)$: Polynomdi. ohne Rest

// Vereinfachen + kürzen

Bsp. $Z(x) > N(x)$

$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-3} = (x+5) + \frac{7}{x-3}$

$x^2+2x-8 : (x-3) = x+5$

$-(x^2-3x)$

$0 + 5x - 8$

$-(5x-15)$

$0 + 7$

Asymptote: $x+5$

B) Lineare Asymptoten

Haben Form $A(x) = mx + b$

$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$

$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Nullstellen Zähler ⇒ Nullstellen Fkt

2. DIFFENTIALRECHNUNG

DIFFERENTIALQUOTIENT

- Differentialquotient: $\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x) + f(x_0)}{\Delta x}}$
- Differenzenquotient: $\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\text{verti. Abstand}}{\text{horizo. Abstand}}$

(63) Ableitungsregeln

LINEARISIEREN, FEHLERRECHNUNG (64) (2D)

- LEF: $\boxed{t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ (Steigung, horiz. Abst., Stützpunkt)
- $t(\varphi_0) = r(\varphi_0) + t\, r'(\varphi_0)$

} Tangentengleichung

- Normale = $\boxed{n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0}$

Fehlerrechnen (1. Variable)

⚠ $\frac{dx}{x} = \%$, $dx = cm / {}^\circ / mm \ldots$

Differential: $df : dx \to f'(x_0)$ $dx \to$ Messfehler

Absoluter Fehler: $\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df}$

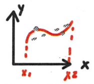
Totales Differential: $\boxed{df = f_x dx + f_y dy}$

Relativer Fehler: $\boxed{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)} \approx \frac{f'(x)dx}{f(x)}}$

$\boxed{\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f}}$

MITTELWERTSATZ

MWS der Diffrechnung: $\boxed{f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)}$



$\boxed{f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Satz von Rolle: Für $f(x_1) = f(x_2) = 0$ $x_1 < x_2$:

gibt es min en $\boxed{\xi\ (x_1 < \xi < x_2) \text{ mit } f'(\xi) = 0}$

(Parallel zur Verbindungslinie x_1, x_2)

Bedingung: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar.

EXTREMALAUFGABEN (65)

⇒ Notwendige Bedingung: $f'(\xi) = 0$

- Lokales Extremum: $f(x_0) \geq f(x)$ (Maximum) $x_0 \in [c,d]$ $[c,d]$
- globales Extremum: $f(x_0) \geq f(x)$ (Maximum) $\forall x \in D(f)$

Kandidaten für Extremstellen:

- Randpunkte von D(f)
- Ableitung in x_0 nicht definiert
- Ableitung definiert mit $g'(x_0) = 0$

Vorgehen:
1. lok. Extrema finden $f'(x) = 0$
2. Liste aller Kandidaten
3. Wähle max./min aus Liste

LOG / e / HYPERBO. FKT

(47) Logarithmen (58) Exp. und Log. Fkt

(52) Definitionen (60) Hyperb. Fkt

DIE ZWEITE UND HÖHERE ABLEITUNG (65)

Monotonieverhalten:

1. Zweite Ableitung

$f(x) = \ldots$ $f'(x) = 0$ $f(x_{1,2}) = \ldots$ Ex.w. $f''(x_{1,2}) = \ldots$

konvex ∪ → $f'' > 0$ (Lin.) n gerade ⇒ lok. Extremst.

konkav ∩ → $f'' < 0$ (Rec) n ungerade ⇒ lok. Wendepunkt

Polynom

2. Monotonietabelle

$f(x) = \ldots$ $f'(x) = 0$ $f(x_{1,2}) = \ldots$ Ex.w.

	$< x_1$	x_1	$< x_2$	x_2	$< a$
f'		0		0	

Einschub: QUADRATISCHES ERGÄNZEN

Ziel: Implizite Gleichung in allg. Form bringen

Bsp. ℂ $-x^2 - 2x - y^2 = 0$

1. Ausklammern (Leitkoeffizient) $\quad -1(x^2 + 2x) - y^2$
2. In Form: $(x^2 + 2dx + d^2) - d^2$ bringen $\quad -1\left((x^2 + 2x + 1^2) - 1^2\right) - y^2$

↓ 1. bin. Form.

3. Bildung des Quadrats $\quad -1\left[(x+1)^2 - 1^2\right] - y^2$
4. Ausmultiplizieren $\quad -(x+1)^2 - 1 + y^2$
5. Scheitelform der Fkt $-(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$ | +1

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ → Radius

Allgemein:

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Mittelpunkt (−1, 0)

EBENE KURVEN

Darstellungen

- Parameter $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$
- Implizit $F(x,y) = 0$
- Explizit $x \to y(x)$

Übergänge

- Parameter → Implizit: t eliminieren evtl. mit subsit.
- Implizit → Explizit: Auflösen nach x oder y
- Implizit → Parameter: $r(t) := (t, f(t))$ (1. Variable) ⇒ Polar/→ Jacobi

Bsp. P → I $r(t) = \begin{pmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{pmatrix}$ ⇒ $x^{1/3} = \cos t$, $y^{1/3} = \sin t$

⚠ Beziehung: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ gilt immer

daraus folgt: $(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$ I: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Polarkoordinate: $r(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)$

Darstellungsformen

Form	Implizit	Parametrisiert	Explizit
Kreis	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$	$\begin{pmatrix}x_0 + r\cos t\\ y_0 + r\sin t\end{pmatrix}$	$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - (x-x_0)^2} + y_0$
Ellipse	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix}x_0 + a\cos t\\ y_0 + b\sin t\end{pmatrix}$	$f(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
Hyperbel Typ (I)	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix}x_0 \pm a\cosh t\\ y_0 \pm b\sinh t\end{pmatrix}$	$f(x) = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$
Typ (II)		$\begin{pmatrix}t\\ a/t\end{pmatrix}$	$f(x) = \frac{a}{x}$
Parabel mit S.P. x_s, y_s	$y - y_s = a(x - x_s)^2$	$\begin{pmatrix}t\\ a(t-x_s)^2 + y_s\end{pmatrix}$	$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$
Paraboloid (elliptisch)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	$\begin{pmatrix}a\,r\cos(\varphi)\\ b\,r\sin(\varphi)\\ r^2\end{pmatrix}$	/
Paraboloid (hyperboli.)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$	$\begin{pmatrix}a\,r\cosh(\varphi)\\ b\,r\sinh(\varphi)\\ r^2\end{pmatrix}$	/
Hyperboloid (Höhe s)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$	$\begin{pmatrix}a\sqrt{d+s^2}\cos(t)\\ b\sqrt{d+s^2}\sin(t)\\ c\cdot s\end{pmatrix}$	d=0, d=1, d=−1
Zylinder	/	$\begin{pmatrix}R\cos(t)\\ R\sin(t)\\ z\end{pmatrix}$	/
Kugel	$(x-x_0)^2 (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$	$\begin{pmatrix}R\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ R\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ R\cos(\theta)\end{pmatrix}$	/
Ellipsoid	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$	$\begin{pmatrix}a\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ b\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ c\cos(\theta)\end{pmatrix}$	

Asym. $y = \pm\frac{b}{a}x$

Torus $\begin{pmatrix}(R + r\cos(\theta))\cos\varphi\\ (R + r\cos(\theta))\sin\varphi\\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}$

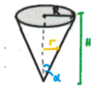
Kreiskegel Typ a $\begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\\ \pm\frac{H}{R} r + z_0\end{pmatrix}$ $r[0,R]$, $\varphi[0, 2\pi]$

nach oben/unten geöffnet

Helix (Schraubenlinie) $\begin{pmatrix}r\cos(2\pi t)\\ r\sin(2\pi t)\\ h\cdot t + c\end{pmatrix}$

h = Umdrehungshöhe c = verschie. in z

t = # Windungen



Kurven

Zykloide $\begin{pmatrix}a + -b\sin(t)\\ a - b\cos(t)\end{pmatrix}$ $r = a$, Punktabstand ≠ Mitte b (68)

Epizykloide

Epizykloide $\begin{pmatrix}(a+b)\cos(t) - a\cos\left(\left(1 + \frac{b}{a}\right)t\right)\\ (a+b)\sin(t) - a\sin\left(\left(1 + \frac{b}{a}\right)t\right)\end{pmatrix}$

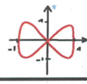
Äußerer Kreis mit Radius a rollt auf einem inneren (fixen) Kreis mit Radius b ab.

Hypozykloide

$\begin{pmatrix}(-)\, x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = (R - r)\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} - (R - r)\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)\\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)\end{pmatrix}$

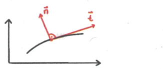
Kreis mit Radius r rollt im Kreis mit Radius R

Zwiebelkurve $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ $0 \le t \le 2\pi$



(69) Kardiode, Bernoulli-Spirale, Astroide, Evolvente, Kettenlinie, Traktrix, Herz, Brachistochrone, Herz, Kartesisches Blatt

Eigenschaften ebener Kurven



- Tangentialvektor (67)
  - Richtung: $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{g}(s) = \vec{r}(t_0) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t_0)}$
  - Steigung: $m(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$
- Normalenvektor (67)
  - Richtung: $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$ $\boxed{\vec{n}(s) = \vec{r}(t_0) + s \cdot \vec{n}(t_0)}$
  - Normalen-/Tangentialeinheisvektor: $\boxed{\vec{n}_1(t) / \vec{t}_1(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}}$

Kurve	Normalenvekt.	Tangentialvekt	Steigung
Explizit	$\vec{n} = \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$	$f'(x)$
Implizit	$\vec{n} = \begin{pmatrix} g_x(x_0,y_0) \\ g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$	$\vec{t} = \begin{pmatrix} -g_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$	$-\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}$
Parametr.	$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}$	$\vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$	$\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$

- Polardarstellung $\hat{=}$ Parametrisierung mit

$(x(\varphi), y(\varphi)) = (\rho(\varphi) \cdot \cos\varphi, \rho(\varphi) \cdot \sin(\varphi))$

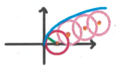
Krümmung

$\curvearrowleft K < \curvearrowright K$

parame.: $\boxed{k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}}$ explizit: $\boxed{k(x) = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}}$

polar: $\boxed{k(\rho) = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}}$

implizit: $\boxed{k(x,y) = \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}}$



- $k(t) < 0 \rightarrow$ ~~Links~~ Rechts krümmung
- $k(t) > 0 \rightarrow$ ~~Rechts~~ Links krümmung
- Krümmungsradius $\boxed{r_k(t_0) = \frac{1}{|k(t_0)|}}$ $\vec{n}_t = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

Evolute (Mittelpunkt Krümmungskreises)

$\boxed{x_M = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}}$ $\boxed{y_M = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}}$

$\boxed{\vec{M}(t_0) = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\text{paramet.}} + \underbrace{\frac{1}{k(t)}}_{r_0} \cdot \frac{\vec{n}(t)}{\|n(t)\|}}$

Explizit:

$\boxed{E(x) = (x, f(x)) + (-f'(x), 1) \cdot \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)}}$

Bsp.

MEHRDIM. DIFF.RECHNUNG

2D $f(x,y)$: ordnet jeden Punkt in xy-Ebene eine höhe

3D $f(x,y,z)$: ordnet jeden Punkt in xyz Ebene einen Wert

NIVEAULINIE / FLÄCHE

- Niveaulinie: $\boxed{f(x,y) = C}$ => Alle Punkte auf Kurve gleichen Wert
- Niveaufläche: $f(x,y,z) = C$ => Analog

PARTIELLE ABLEITUNG

$$\boxed{f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}}$$

=> "einzelnes" ableiten (y -> Analog)

Satz von Schwarz & Integrabilitätsbedingung

$$\boxed{f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)}$$

Folgerung: Reihenfolge von part. Ableitung ist egal.

Integrabilitätsbedingung (IB)

$$\boxed{\varphi_y(x,y) \equiv f_{xy}(x,y) \equiv f_{yx}(x,y) \equiv \psi_x(x,y)}$$

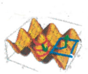
Satz: Erfüllen 2 stetig diffbare Fkt die IB in einen achsen-parallelen Rechteck, dann gibt es eine Fkt f mit $f_x \equiv \varphi$; $f_y \equiv \psi$

(1) φ und ψ integrieren

(2) Terme vergleichen

GRAD. UND RICHTUNGSABLEITUNG

Auch hier gilt: - IB $\varphi_y = \psi_x$, $\varphi_z = \chi_x$, $\psi_z = \chi_y$
- Satz von Schwarz ($f_{xyz} = f_{xyzz}$)



= Niveaulinie
= Niveaufläche
=> ⊥ zu grad

GRADIENT:
- Richtung grad.: größte Richtungsableitung
- Länge grad.: Betrag größten Richtungsableitung
- grad f ⊥ Niveaufläche & Tangentialebene

Richtungsableitung ∇f am (x_0,y_0,z_0) sklarprodukt mit $\frac{\vec{e}}{|e|}$

→ R.abl. von $f(x,y,z)$ in Richtung $\vec{e}$ ist geg. durch
$>0 \rightarrow$ Wachstum
$<0 \rightarrow$ Fallen.

$\boxed{D_{\vec{e}} f = \text{grad} f(x_0,y_0,z_0) \cdot \frac{\vec{e}}{|e|}} = \nabla f \cdot \vec{e}$ ⚠ $|\vec{e}| \stackrel{!}{=} 1$ (Skalarprodukt $\stackrel{!}{=}$ c)

TANGENTIALEBENE MIT GRADIENT (IMPLIZIT) sehe Anhang.

$\boxed{((x_0,y_0,z_0) - (x,y,z)) \cdot \text{grad}(f(x,y,z))}$

(1) auf Fom $g(x,y,z) = \text{konst}$

(2) Grad f

(3) Eingeben gesuchten Punkt

(4) $T(E) = Ax + By + Cz = D \leftarrow$ durch einset. Punkt

Tangentialebene finden Explizit

Tangentialebene in $P(x_0,y_0) \hat{=}$ Richtungsableitung in $P(x_0,y_0)$

A) Tangentialebene an $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$ $z = f(x,y)$

B) Tangentialebene an $f(x,y,z) = C$ in $P(x_0,y_0,z_0)$

$\boxed{0 = f_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0)}$

LINEARISIEREN, FEHLERRECHNUNG

↳ analog zum eindimensionalen Fall (2. Variablen)

- Fkt. wird an Punkt (x_0,y_0) durch Ersatzfkt approxim.:

$\boxed{(x_0,y_0) \rightarrow f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$

- Graph LEF = Tangentialebene von f in $P(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$
  ↳ siehe Tangentialebene finden

Fehlerrechnung

- Absoluter Fehler an P durch df abgeschätzt

↳ haben Einheiten

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) \\ &\cong df = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy \end{aligned}}$$

relativ., absolu. Fehler einsetzen

- Relativer Fehler → %

evt. $dz(x_0,y_0,z_0)$

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \approx \frac{df}{f} = \frac{f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy}{f(x_0,y_0)}}$$

VERALLGEMEINERTE KETTENREGEL

„Totale Ableitung" $F(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$

$\boxed{F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)}$

$\boxed{\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}}$ • Tangentensteigung der Niveaulinie bei (x_0,y_0)

EXTREMA

(x_0,y_0) ist eine lokale oder globale Maximal- oder Minimalstelle:

$f(x_0,y_0) \gtreqless f(x,y)$ für alle $x,y \in$ → Kreisscheibe um (x_0,y_0) / → $D(f)$

Satz: Wenn (x_0,y_0) lokale Extremalstelle von f, so ist...
- (x_0,y_0) ein Randpunkt des $D(f)$ oder
- eine der partiellen Ableitungen nicht definiert oder
- $f_x(x_0,y_0) = 0 = f_y(x_0,y_0)$

Klassifikation von Extrema

Hesse-Matrix: $Hf(x_0,y_0) = \boxed{\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}$

E.W.

$\lambda > 0$ => Positiv definit => Minimum

$\lambda < 0$ => Negativ definit => Maximum

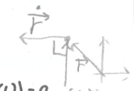
$\lambda \lesseqgtr 0$ => Indefinit => Sattelpunkt

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $A_1 = a$ $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & e & h \end{pmatrix}$

- positiv definit: Alle det $A_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$
- negativ definit: Alle det $A_i < 0$ für $i = 1, 3, 5, \dots$
  Alle det $A_i > 0$ für $i = 2, 4, 6 \dots$

- Finden von Extrema: Kochrezept

1) Gebiet skizzieren
2) Kandidatensuche im Innern
   - grad $f = (f_x, f_y) = (0,0)$
   - löse nach x, y auf
   - überprüfe ob Kandidat im Gebiet liegt
3) Kandidaten auf Randkurven
   - Parametrisiere Randkurve
   - Setze Parametrisierung in f ein
   - Setze Ableitung = 0: $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = 0$
4) Eckpunkte als Kandidate
   - Setze Ecken in $f(x,y)$ ein



$\nabla f(\vec{r})$
$\nabla f(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \rightarrow$ Kandidat

3. INTEGRALRECHNUNG

DAS BESTIMMTE INTEGRAL

Riemasche Summe (70)

Integrationsregeln (71)

Bestimmtes Integral (70)
↳ in [a, b] endlich
↳ in [a, b] stetig

HAUPTSATZ DER INFINITESIMALRECHNUNG

$\boxed{\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt \stackrel{!}{=} f(x)}$ • $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

$\boxed{\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)}$ $F'(x) = f(x)$, $F(x) = \int_a^x f(t)$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,dt = f(x, u(x)) \cdot u'(x) - f(x, v(x)) \cdot v'(x) + \int_{v(x)}^{u(x)} f_x(x,t)\,dt}$$

- MWS. Integralrechnung (70)

PARTIELLE INTEGRATION UND SUBSTI.

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_b^a - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx}$$

↳ (Trick: mit 1 multipli. $\int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\arctan x}$)

Substitution

$\int \frac{1}{5x+7} dx$ $\boxed{u = 5x - 7 \quad \frac{du}{dx} = 5 \quad dx = \frac{du}{5}}$

$\int \frac{1}{u} \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{5} \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|5x - 7| + C$

Grenzen bei best. Integrale: $\int_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $z = \sqrt{x}$ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $dx = 2\sqrt{x}$

$z(4) = \sqrt{4}$ $z(9) = \sqrt{9}$ $\longrightarrow \int_2^3 \frac{e^z}{z} 2z\,dz$

Integraltyp	Substitution	Beispiele
$\int f(ax+b)dx$	$u = ax+b$, $dx = \frac{du}{a}$	$\int \sqrt{4x+5}dx$ (u=4x+5)
$\int f(x) \cdot f'(x)dx$	$u = f(x)$, $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx$ (u=sin(x))
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx$	$u = f(x)$, $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\int (\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x}dx$ (u=ln(x))
$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx$	$u = g(x)$, $dx = \frac{du}{g'(x)}$	$\int x \cdot e^{x^2}dx$ ($u=x^2$)
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$u = f(x)$, $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx$ ($u = x^2 - 3x + 1$)
$\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2})dx$	$x = a \cdot \sin(x)$, $dx = a \cdot \cos(u)\,du$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos(u)$	$\int \sqrt{r^2 - x^2}dx$ (x=rsin(u))
$\int f(x; \sqrt{a^2 + x^2})dx$	Wie 6 mit sinh statt sin ect.	Wie 6 mit sinh statt sin e
$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2})dx$	Wie 7 mit cosh statt sinh ect.	Wie 7 mit cosh statt sinh

$\int f(\sin(x);\cos(x))dx$	$u=\tan(\frac{x}{2})$; $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}$;	$dx=\frac{2}{1+u^2}du$; $\cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$	$\int\frac{1+\cos x}{\sin x}dx$
$\int f(\tan(x))dx$, $\int f(\sin^2(x);\cos^2(x))dx$	$\tan(x)=u$; $\sin^2(x)=\frac{u^2}{1+u^2}$;	$dx=\frac{1}{1+u^2}du$; $\cos^2(x)=\frac{1}{1+u^2}$	
$\int f(e^x)dx$, $\int f(\sinh(x);\cosh(x))dx$	$u=e^x$; $\sinh(x)=\frac{u^2-1}{2u}$;	$dx=\frac{du}{u}$; $\cosh(x)=\frac{u^2+1}{2u}$	$\int\frac{\sinh(x)+1}{\cosh(x)}dx$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

- Zählergrad ≥ Nennergrad : Polynomdivision

Falls Rest: $\int$ Ursp. $=\int$ ll pol. division $dx+\int\frac{\text{Rest}}{\text{Ursp. Nenner}}dx$

- Zahlergrad < Nennergrad :

1) N.S. Nenner 2) $\frac{A}{(x\pm x_1)}+\frac{B}{(x\pm x_2)}+\frac{C}{(x\pm x_3)}\dots$ (siehe Par. brüche)

Partialbrüche — Muss noch Koeff. ausgleichen. Siehe Anhang

$\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-4)}$

$\frac{1}{(x-3)^2(x-4)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-4)}$

$\frac{1+x}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-4)}$

$\frac{1}{(x^2+2x+5)(x-3)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+5)}+\frac{C}{(x-3)}$

$\frac{1}{(x^2+2x+5)^2(x-3)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)}+\frac{E}{(x-3)}$

$\frac{x+2}{x^2(x^2+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$

$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=\frac{Ax+C}{x^2+1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}$

3) Auf gleichen Nenner bringen

4) Nenner=Zähler und Koef. vergleich $K(x+5)(x-1)$ Achtung

5) Standardintegrale

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ $\int\frac{1}{1\mp x^2}dx=\text{arctan}h\ x+c$

$\int\frac{1}{x^s}dx=\frac{-1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}+c\ (s\neq1)$ $\int\frac{1}{a^2\mp x^2}dx=\frac{1}{a}\text{arctan}h\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$\int\frac{1}{x^2+bx+c}dx=\frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right)+c$

EINFACHE NULLSTELLEN MIT REST

$(2x^3-x^2+3x+1)(x+1)$

1) RUFFINI

	2	-1	3	1
-1		-2	3	-6
	2	-3	6	-5: R

$2x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}$

2) POLYNOMDIVISION

$(2x^3-x^2+3x+1):(x+1)=2x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}$
$-(2x^3+2x^2)$
$0\ -3x^2+3x$
$-(3x^2-3x)$
$0\ +6x+1$
$-(6x+6)$
$0\ -5$ R

KOMPLEXE NULLSTELLEN MIT REST

1) RUFFINI

$(2x^6+14x^4+5x^3-3):(x^3+2)$ $x^3=u$

$(2u^2+14u^2+5u-3):(u+2)$

	2	14	5	-3
-2		-4	-20	30
	2	10	-15	27 R

$\Rightarrow 2u^2+10u-15$ R: 27
$\Rightarrow 2x^6+10x^3-15$ R: 27

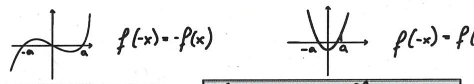
2) POLYNOMDIVISION

$(x^4+x^2-2x+1):(x^2-1)=x^2+2$
$-(x^4-x^2)$
$0\ +2x^2-2x$
$-(2x^2-2)$
$0\ -2x+2+1$ R

$\Rightarrow x^2+2-\frac{2x+3}{x^2+1}$

- Wurzelintegrale → Quad. ergänzen
- Trigonom Fkt → Identitäten

BESTIMMTE INTEGRALE UNGERADE FKT



$f(-x)=-f(x)$ $f(-x)=f(x)$

$\int_{-a}^{a}\text{ungerade Fkt}\,dx=0$ $\int_{-a}^{a}\text{gerade Fkt}\,dx=2\int_0^a\text{gerade Fkt}\,dx$

UNEIGENTLICHE INTEGRALE Existiert wenn es konvergiert

$\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{1}{x^2}dx$ $\int_0^1\frac{1}{x^2}=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\frac{1}{x^2}dx$

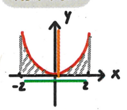
$\int_0^2\frac{1}{(1-x)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(1-x)^2}+\int_1^2\frac{1}{(1-x)^2}=\lim_{a\to1^-}\int_0^a\frac{1}{(1-x)^2}dx+\lim_{a\to1^+}\int_a^2\text{—"—}dx$

MEHR.DIM. INTEGRALRECHNUNG

≙ Integration über Flächen/Volumenelement

INTEGRATIONSGRENZE

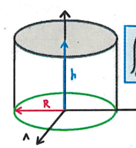
Funktion:



$\iint_A dA=\int_{-2}^{2}\int_0^{x^2}1\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}x^2dx$

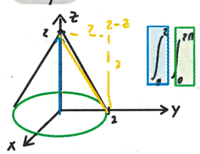
$\iint_A dA=\int_0^4\int_{-\sqrt y}^{\sqrt y}1\,dx\,dy=\int_0^4\int_{-\sqrt y}^{\sqrt y}1\,dx\,dy$

Zylinder



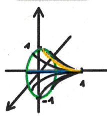
$\int_0^{h}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}1\,r\,dr\,d\varphi\,dz$

Kegel

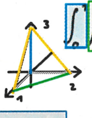


$\int_0^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2-z}$

Spezielle:



$\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\sqrt{x}}dr\,d\varphi\,dx$



$\int_0^{3}\int_0^{2-2x}\int_0^{3-2x-\frac{3}{2}y}dz\,dy\,dx$

$Ax+By+Cz=D$ $\frac{x}{xs}+\frac{y}{ys}+\frac{z}{zs}=1$ $z=3-\frac{3}{2}y-3x$

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ $3x+\frac{3}{2}y+z=3$ $3x+\frac{3}{2}y=3$ $y=2-2x$

K.S. TRANSFORMATION

Von Kart. → Anderen: Korrekturfaktor bei dV und dF

Gängigsten:
$dF=dx\,dy=|\det(J)|\,du\,dv=\rho\,d\rho\,d\varphi$
$dV=dx\,dy\,dz=|\det(J)|\,du\,dv\,dw=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

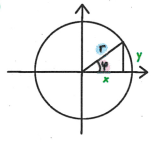
Sonst: $J=$ Jacobi-Matrix $(u,v,w)\mapsto(x,y,z)=(5u,2v,3w)$

Hier: von u,v,w zu x,y,z

$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}$

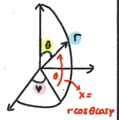
$dF=|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\,du\,dv=\left|\det\begin{pmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{pmatrix}\right|du\,dv$

Zylinder / Polar (r,φ,z)
$x=r\cos\varphi\ (+x_0)$
$y=r\sin\varphi\ (+y_0)$
$z=z$
$dA=r\,dr\,d\varphi$
$dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$
$dO=R\,d\varphi\,dz$

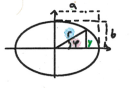


r → aus Jacobi-Matrix

Kugel (r,φ,θ)
$x=r\sin\theta\cos\varphi\ (+x_0)$
$y=r\sin\theta\sin\varphi\ (+y_0)$
$z=r\cos\theta\ (+z_0)$
$\cos\theta\to$ bzg xs
$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$
$dO=R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$



Ellipse/Ellipsenzylinder (r,φ,z)
$x=a\cdot r\cdot\cos\varphi\ (+x_0)$
$y=b\cdot r\cdot\sin\varphi\ (+y_0)$
$z=z$
$dA=abr\,dr\,d\varphi$
$dV=abr\,dr\,d\varphi\,dz$
$dO=ab\,dz\,d\varphi$



Vorgehen:
(1) Neue Koord. einführen (oft gegeben)
(2) Integrationsbereich anpassen (Bild alten Bereich unter Transformation)
(3) Jacobi-Determin.
(4) Einsetzen + ausrechnen

ANWENDUNG INTEGRALE

+ Grund. 2-Fach Integrale

0 BOGENLÄNGE

$L=\int_{t_1}^{t_2}|\dot r(t)|$ $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt$ $\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}\,d\rho$

1 FLÄCHENBERECHNUNG

E: Explizit
P: Parameter
Po: Polar

- Teilfläche 2D Ebene

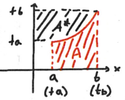
$A=\iint_B 1\,dA$

⇒ Falls nicht kartesisch: Verzerrungsfaktor

- Fläche zwischen Kurve und X-Achse und Y-Achse

E: P:

x: $A=\int_a^b f(x)\,dx$ $A=\int_{tA}^{tB}y(t)\,\dot x(t)\,dt$



y: $A=\int_a^b x\cdot f'(x)\,dx$ $A^*=\int_{tA}^{tB}x(t)\,\dot y(t)\,dt$

⇒ neg. Bereich: Grenzen vertauschen

- Sektorfläche

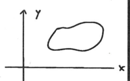
P: $A=\frac{1}{2}\int_{tA}^{tB}(x(t)\dot y(t)-\dot x(t)\,y(t))\,dt$

$\frac{1}{2}\int_{\varphi A}^{\varphi B}(x\dot y-\dot x y)\,d\varphi$ wobei $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$

Po: $=\frac{1}{2}\int_{\varphi A}^{\varphi B}\rho^2\,d\rho$

- geschlossene Kurve

P: $A=\left|\int_{t_1}^{t_2}\dot x\,y\,dt\right|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\dot y\,x\,dt\right|$



- Jordan Kurve

$A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot y-y\dot x)dt$

umschlossene Fläche

2 OBERFLÄCHENBERECHNUNG

- Rotationsoberfläche

Um X-Achse:

E: P:
$M=2\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ $O=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt$

Um Y-Achse

E: P:
$M=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ $O=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt$

3D • Gekrümmte Fläche

1) Fläche Parametrisieren
2) $dO=|\vec r_u\times\vec r_v|\,du\,dv$
3) Oberfläche: $A=\iint_B|\vec r_u\times\vec r_v|\,du\,dv$ kein Jakobi-Faktor

⚠ Kugel: $dO=|\vec r_\theta\times\vec r_\varphi|\,d\theta\,d\varphi=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

- Oberfläche durch f(x) gegeben:

$A=\iint_B\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy$

3 VOLUMENBERECHNUNG

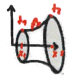
- Teilfläche 3D Ebene

$A=\iiint_B 1\,dx\,dy\,dz$

- Rot. Körper um X/Y-Achse

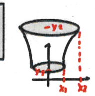
E: P:

x: $V=\pi\int_{x_1}^{x_2}f(x)^2dx$ $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)^2\,\dot x(t)\,dt$



y: $V=\pi\int_{x_1}^{x_2}x^2f'(x)\,dx$ $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)^2\,\dot y(t)\,dt$

$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}(f^{-1}(y))^2dy$



- Äußerlicher Bereich "Hohlzylindermethode"

$V_y^A=2\pi\int_{x_1}^{x_2}x\,f(x)\,dx$ $V_y^A=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)\cdot y(t)\,\dot x\,dt$

4 MASSENSCHWERPUNKT

⚠ Symm. ausnutzen

$M=\iiint_B\rho(x,y,z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$ } Masse ρ = Dichte

$x_s, y_s, z_s=\frac{\iiint_B x_s/y_s/z_s\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}$

Zusammengesetzter Körper: $X_S = \frac{\sum_i x_{Si} \cdot m_i}{\sum_i m_i}$

5 Volumenschwerpunkt

$$V = \iiint_B \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

$$x_S, y_S, z_S = \frac{\iiint_B x/y/z\; dx\,dy\,dz}{V}$$

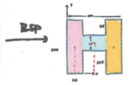
zsm.gesetzter Körper: $X_S = \frac{\sum x_{Si} \cdot V_i}{\sum_i V_i}$

6 Flächenschwerpunkt

$$A = \iint_B dx\,dy \qquad x_S/y_S = \frac{\iint_B x/y \cdot dx\,dy}{A}$$

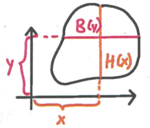
$$x_S = \frac{\sum_i x_{Si} \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

Bsp.



Für ebenen Körper:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} B(y)\,dy$$



$$x_S = \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} x\,H(x)\,dx \qquad y_S = \frac{1}{A}\int y\,B(y)\,dy$$

7 Massenträgheitsmoment

$$I_x/I_y/I_z = \iiint_B (y^2/x^2\,x^2+z^2/z^2\,y^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

M.T.M bzgl. x-Achse des Rot. Körpers:

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^4\,dx$$

↓ so wählen, das x nach y integriert und andersrum

Bei Rot. parametrisierten Kurve

$$I_x = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^4\,|\dot{x}(t)|\,dt$$

8 Flächenträgheitsmoment

$$I_x/I_y = \iint_B y^2/x^2\,dx\,dy$$

Polar: $I_p = I_x + I_y = \iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_B r^3\,dr\,d\varphi$

9 Trägheitsmom. eindim. Körper (Stäbe)

$$\Theta_y = \int \rho\,x^2\,dx$$

Wenn Kurve symmetrisch gilt:

$$\int_0^{2\pi} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\int_0^{\pi}$$

Vektoranalysis

Skalarfelder und Vektorfelder

- Skalarfeld: $f: (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$ — Ort ⟶ Skalar — Temp. einer Flüssigkeit an Ort
- Vektorfeld: $\underline{v}: \underline{r}(x,y,z) \longrightarrow \underline{v}(\underline{r})$ — Vektor ⟶ Vektor — $\vec{v}$ Wasserpartikel in jedem Ort
- stationär: zeitunabhängig • instationär: zeitabhängig
- Feldlinie: $K \subset B$ Kurve, sodass v immer tangential zu K
- homogen: $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{a}$ (konstant)

Differentialoperatoren

- $\text{grad } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ = Nabla

  Skalarfeld → Vektorfeld
- $\text{div } \vec{v}(x,y,z) = \text{div}(\vec{v}(x,y,z)) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ "Quellstärke"

  Vektorfeld → Skalarfeld

  – Skalarfeld ⇒ $f = f(x,y,z)$
  – Vektorfeld ⇒ $\vec{v} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $\text{rot } \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}(x,y,z)$ "Verwirbelung"

  Vektorfeld → Vektorfeld

  2D $\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$

Zusammenhänge

- $\text{grad}(fg) = f\,\text{grad}(g) + g\,\text{grad}(f)$
- $\text{rot}(f\vec{v}) = f\,\text{rot}(\vec{v}) + \text{grad}(f) \times \vec{v}$
- $\text{div}(f\vec{v}) = f\,\text{div}(\vec{v}) + \text{grad}(f) \cdot \vec{v}$
- $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \text{rot}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{u})$
- $\text{div}(\text{grad}(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
- $\text{div}(\text{rot}\,\vec{v}) = 0$ (wirbelfelder sind quellenf.)
- $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$ (Potentialfel. sind wirbelfrei)
- $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$

Flächen in Parameterdarstellung

- Parameterlinien

  ↳ Halte u fest, variiere v (oder umgekehrt)
  - $v = v_0$: $u \to \vec{r}(u, v_0) \longrightarrow$ u-Linie
  - $u = u_0$: $v \to \vec{r}(u_0, v) \longrightarrow$ v-Linie
- Tangentialvektor: $\vec{t} = \dot{\vec{r}} \cdot (x_u, y_u, z_u)$
- Tangentenfläche: $T(u,v) = \vec{h}(u) + v \cdot \dot{\vec{h}}(u)$ mit $\dot{\vec{h}}(u) = \frac{d}{du}\vec{h}(u)$

  ≠
- Tangentialebene: $E = \vec{r}(u_0,v_0) + \vec{r}_u(u_0,v_0)(u-u_0) + \vec{r}_v(u_0,v_0)(v-v_0)$
- Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}(u_0,v_0) = \pm\frac{\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)}{|\vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0)|}$

Cheatsheet – Fluss

I Fluss durch Ebene

- Wann: Ebene Kurven, 2D-Raum, Parametrisierbaren Weg
- Beispiel: Fluss durch Ellipse
- Wie: (1) Fläche parametrisi. r(t)

  (2) Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ von r(t) △ anpassen

  (3) $\Phi = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot n(t)\,dt$ (Skalarpr.)

  (oft: $\int_0^{2\pi}$)

II Fluss durch Fläche

- Wann: Körper, Flächen, 3D-Raum; wenn r(u,v) einfach zu bestimmen / vorgegeben
- Beispiel: – Fluss durch $S = \{x-y, x+y, xy\}$

  – Fluss durch Paraboloid
- Wie: (0) oft: Körper param. $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

  (1) $r_x \times r_y$ △ kein Betrag

  (2) Vorzeichen anpassen

  (3) $\iint \vec{v}(r(x,y)) \cdot r_x \times r_y\,dx\,dy$

  ⇒ Wenn Bereich: Grenzen direkt entnehm.

  ⇒ Evt. KS-Trans bei (3) ausführen

III Fluss durch Fläche / Körper mit Gauß

- Wann: Körper einfache Grenzen mit kompliz. Parametrisierung, hat kann in Volumenintegral

  Fluss von innen nach außen
- Beispiel: Fluss durch Kegel
- Wie: (1) Divergenz berechn.

  (2) etv KS-Trans. von div

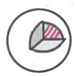
  (3) $\iiint_V \text{div}\,\vec{v}\,dV$

IV Fluss durch zusammeng. Körper

- Beispiel: (1) Fläche I: • n bestimmen
  - $\iint \vec{v} \cdot n$
  - KS Trans.

  (2) $\iiint_V \text{div}\,v\,dv = \Sigma$ Fluss durch Fläche + Fluss Kugel

  ↳ Auflösen nach ges. Größe



Der Fluss

Ebene: 1. $\text{div}(\vec{v}) = $ konst oder einfach? ⇒ dann Satz, Gauss

I $\Phi = \iint_A \vec{v} \cdot n_0\,dA$ $|\vec{n}_0| = 1$

II Zylindrisch / Körper

$$\Phi = \iint \vec{v}\big((u,v)\big) \cdot \underbrace{\big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)}_{n}\,du\,dv$$

$\vec{n}$ muss nicht normiert sein

oft: $t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → Ableitung von Kurve $n = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ⇒ nach INNEN $n = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ ⇒ nach AUßEN

Der Divergenzsatz, Gauss

Fluss durch geschlossene Fläche ≙ Divergenz über Volumen, die diese Fläche einschiesst:

III $\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\,dO = \iiint_B \text{div}\,\vec{v}\,dV$

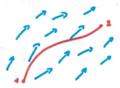
⇒ berechnet den Fluss von innen nach außen

Quellen und Senken

- $\text{div}\,v(r_0) > 0 \rightarrow P_0$ = Quelle
- $\text{div}\,v(r_0) < 0 \rightarrow P_0$: Senke
- $\text{div}\,v(r_0) = 0 \rightarrow v$ = quellenfrei

  $\text{rot}\,\vec{v} = 0 \rightarrow v$ = wirbelfrei

Die Arbeit



Weg: Kurve mit Durchlaufsinn

Arbeit: mechanische Arbeit die v leistet wenn längst Weges bewegt

- Infinitesimales Stück Arbeit: $dA = \vec{v} \cdot d\vec{r}$
- Summe entlang Weges: $A = \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$
- Mit Parameterdarstellung: $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ ↳ Geschwind.

  Wegstück: $dA = \dot{\vec{r}}\,dt$

- Summe entlang Weges: $A = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot \dot{r}(t)\,dt$

Stokes

rot(v) in ganz A definiert!

$$A = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{n}\,dO \qquad |\vec{n}| = 1$$

$\text{rot}\,\vec{v} = 0 \rightarrow v$ = wirbelfrei $\xrightarrow{EZH}$ ⇒ potenzial feld konserv.

$\text{div}\,\vec{v} = \text{rot}\,\vec{v} = 0 \rightarrow$ harmonisch

Satz von Stokes für den Fluss anwenden

Für $v = \text{rot}\,w$: $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{w}\,dr = \int_{\partial S} w\,dr$

Potentialfelder

Konservativ: Mindestens ein Punkt muss erfüllt sein, damit v konservativ. Alle Aussagen äquivalent.

wenn / dann

- $\text{rot}\,\underline{v} = 0$ (für ≤ 3 Dimensionen)
- Es existiert ein Potential f, sodass $\text{grad}\,f = \underline{v}$
- Arbeit ist unabhängig von gewählten Weg
- Arbeit verschwindet für geschlossene Wege

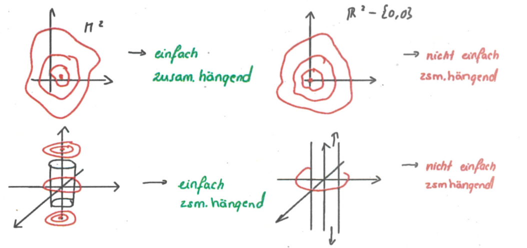
  muss nicht EZH sein

1) $\int v_1\,dx, \int v_2\,dy, \int v_3\,dz$ 2) Vergleichen Terme

3) $W = P(\vec{r}_2) - P(\vec{r}_1)$

Einfach zusammenhängend + $\text{rot}\,\vec{V} = 0$ ⟹ konser.

- jedes Punktepaar lässt sich verbinden
- jeder geschlossene Weg lässt sich auf Punkt reduzieren



Bsp. EZH
- Halboffener Zylinder
- Oberfläche Ellipsoid
- Oberfläche Kugel
- Kugel / Hohlkugel
- $\mathbb{R}^3$ \ Punkt
- $\mathbb{R}^3$ Gefüllte Kugel

Nicht EZH
- $\mathbb{R}^3$ ohne Achse
- Torus
- Gerade
- $\mathbb{R}^2$ / Punkt

Arbeit

Geschlossener Weg?

JA: Ist $\text{rot}\,\underline{v} \cdot \underline{n}_0$ = konst?
- JA: $A = \text{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{n} \cdot \iint_S dO$
- NEIN: $A = \iint \text{rot}\,\vec{v} \cdot \underline{n}_0\,dA$

NEIN: Ist $\text{rot}\,\vec{v} = 0$?
- JA: $v_1 = f_x$, $v_2 = f_y$, $v_3 = f_z$ ↓ $W = \Phi_{ENDE} - \Phi_{ANF.}$
- NEIN: paramet. → r(t) → $\dot{r}(t)$ einsetzen in $\vec{v}$; $W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$

7. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- **linear**: keine $\sin y, y^2, e^y, y'^2, \tan(y')$ … $(y'' + 2y' = 0)$
- **nicht linear**: Potenzen kommen vor $(y' - y^2 = 0)$
- **homogen**: kein Störterm → y_h
- **inhomogen**: hat Störterm → y_p (Term ohne y)
- **Ordnung**: höchste vorkommende Ableitung
- **konst. Koeff.** $y'' + 2y' = 0$ z.B. ↳ kein $f(x)$ (x^2)
- **Autonom**: Die unabhängige Variable (x) kommt nicht explizit vor
- **Regulär**: Durch jeden Punkt genau eine Kurve
- **Richtungsfeld**: Alle Punkte des $D(f)$ mit Steigung y' einer Lsg.kurve
- **Feldlinien**: Tangential zum Feldvektor in jedem Punkt eines Vektorfelds auftretende Kurven, wobei: $y' = \frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}$

LINEARE DGL

Form: Inhomogen: $\boxed{y'(x) = f(x)\,y + g(x)}$ Störterm / partikulär

Homogen: $\boxed{y'(x) = f(x)\,y}$

Allg. Lösung: $y(t) = C_1 \cdot y_{h1} + C_2 \cdot y_{h2} + \ldots + C_n \cdot y_{hn} + y_p$

DGL 1. ORDNUNG - HOMOGENE LÖSUNG

Form: $\boxed{y' = g(x) \cdot y}$ $\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}$ $y' = g(x,y)$

(A) SEPARATION DER VARIABLE

(1) $y' \rightarrow \frac{dy}{dx}$

(2) DGL separieren

(3) Integrieren

(4) Nach y auflösen

(5) AWB

- $(x^2+3)y' + 2xy = x \quad y(0) = 1$

$(x^2+3)\frac{dy}{dx} + 2xy = x \quad | \cdot dx$

$(x^2+3)\,dy = -2xy\,dx + x\,dx$

$(x^2+3)\,dy = x\,dx \cdot (-2y+1) \quad |:()$

$\frac{1}{1-2y}\,dy = \frac{1}{x^2+3}\,dy \quad | \int$

$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \frac{1}{2}\ln C$

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2C(x^2+3)} \quad y(0) = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$

(B) SUBSTITUTION: Auf sep. DGL zurückführen

$y'(x) = h\left(\frac{y}{x}\right)$, $u(x) = \frac{y(x)}{x}$	$y'(x) = f(ax + by(x) + c)$, $u(x) = ax + by(x) + c$	$y'' + x^2y' = 5x$, $z(x) = y'(x)$

(1) Umformen

(2) Substitution ⚠ Kettenregel

(3) Separation der Variable Lösen

(4) Rücksubstitution

$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2 \quad |:x^2$

$y' = -\frac{y}{x} - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$\boxed{u = \frac{y}{x}} \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = -u - 1 - u^2$

$\frac{u'}{(u+1)^2} = -\frac{1}{x} \quad | \int$

$-\frac{1}{u+1} = -\ln|x| + c$

$\frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{\ln|x| + c}$

$y = x\left(\frac{1}{\ln(x) + c} - 1\right)$

$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1 \quad v(t) = \dot{x}(t)$

$\dot{v} = -v^2 + 1$

DGL 1. ORDNUNG - PARTIKULÄRE LÖSUNG

(A) GESCHICKTER ANSATZ: $\frac{1}{x^2} \Rightarrow A \cdot \ln|x|$

Störterm	Ansatz für y_p
Polynom mit Grad n	Polynom mit Grad n (Falls nicht schon Teil der homogenen Lsg.) Polynom mit Grad n+1 (Falls Polynom mit Grad n Teil der homogenen Lsg. ist.)
$A \cdot \sin(\omega x)$ — iω kein Lsg ist	$B\sin(\omega x) + C\cos(\omega x)$ — iω eine Lsg ist, dann
$A\cos(\omega x)$	$B\sin(\omega x) + C\cos(\omega x)$ — $x(C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x))$
$A\sin(\omega x - \varphi)$	$B\sin(\omega x - \varphi) + C\cos(\omega x - \varphi)$
Ae^{bx}	Ce^{bx}, Axe^{bx}, Ax^2e^{bx}
$A\sinh(\omega x)$	$Be^{\omega x} + Ce^{-\omega x}$ oder $B\sinh(\omega x) + C\cosh(\omega x)$
$A\cosh(\omega x)$	$Be^{\omega x} + Ce^{-\omega x}$ oder $B\sinh(\omega x) + C\cosh(\omega x)$

- Wenn y_p bereits (H) löst, oder A, B… von x abhängen, dann funktioniert der Ansatz nicht ⇒ Neuer Versuch: $y_{p\,neu} = y_{p\,alt} \cdot x$
- Sonst: Lagrange mit x multiplizieren log: → durch x dividieren

(1) Homogene DGL lösen

(2) Ansatz wählen y_p

(3) y'_p berechnen

(4) in DGL einsetzen

(5) Koeffizientenvgl.

$y' - 3y = e^{2x}$

(H) $y' - 3y = 0 \Rightarrow y_h = Ce^{3x}$

(I) $y_p = Ae^{2x} \quad y'_p = 2Ae^{2x}$

$2A\cancel{e^{2x}} - 3A\cancel{e^{2x}} = \cancel{e^{2x}}$

$2A - 3A = 1 \Rightarrow y_p = -e^{2x}$

$A = -1$

$y = y_h + y_p = Ce^{3x} - e^{2x}$

(B) VARIATION DER KONST. / LAGRANGE

Bsp. wenn $y_p = B\cos(x)$ nicht funktioniert

(1) $y_p = y_h$ mit $C \Rightarrow C(x)$ oder $\gamma(x)$

(2) Ableiten und in DGL einsetzen — dann $y_p = B(x)\cos(x)$

(3) $C(x)$ durch Integration bestimmen — $y'_p = B' \ldots + B \ldots$

(4) $C(x)$ in y_p einsetzen — Lagrange 2. Ordnung sehe Anhang

$y' + y\tan x = \sin 2x$

(H) $y' + y\tan x = 0 \Rightarrow y_h = K\cos x$

(I) $y = \gamma(x) \cdot \cos x$

Abl. $y' = \gamma'(x)\cos x - \gamma(x)\sin x$ — in original DGL einset.

$(\gamma'(x)\cos x - \gamma(x)\sin x) + (\gamma(x)\cdot\cos x)\tan x = \sin 2x$

$\cos x\left(\gamma'(x) - \frac{\gamma(x)\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} + \gamma(x)\cancel{\tan x}\right) = \sin 2x$

löse nach $\gamma'(x)$: $\gamma'(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 2\sin x$

integ.: $\int 2\sin x\,dx = -2\cos x + K = \gamma(x)$ dann in $y_h = \gamma(x)[\ldots]$ einset.

$y = (-2\cos x + K)\cdot\cos x = \underline{-2\cos^2 x + K\cos x}$

EXAKTE DGL (POTENTIALFUNKTION)

Form: $\boxed{\varphi(x,y) + \psi(x,y)\cdot y' = 0}$ mit $\varphi_y \stackrel{!}{=} \psi_x$

⚠ $D(f) \Rightarrow$ einfach zsm.hängend — Integrabilitätsbedingun erfüllt

Lösung einer exakten DGL

(1) I.B. überprüfen

(2) Integrieren $\varphi\,dx = \psi\,dy$

(3) Terme zusammennehmen

(4) $f(x,y) = C$

(5) Evt. nach y auflösen

$x(e^y - 3x)y' - 6xy + e^y + 1 = 0$

$\frac{d}{dy}(-6xy + e^x + 1) = -6x + e^y = \frac{d}{dx}(e^y - 3x)$

$\int -6xy + e^y + 1\,dx = -3x^2y + e^yx + x + C(y)$

$\int xe^y - 3x^2\,dy = xe^y - 3x^2y + C(x)$

$f(x,y) = -3x^2y + e^yx + x$

$C = x(e^y + 3xy + 1)$

ORTHOGONALTRAJEKTORIEN

Kurve, die alle Kurven einer geg. Kurvenschar senkrecht schneidet

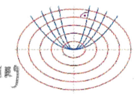
Orthogonaltrajektorie finden Bsp. $f(x,y) = \sin(x)(1-y^2)$

(1) $f'(x,y)\cdot y' = 0 \quad 0 = \cos(x)(1-y^2) - 2\sin(x)yy'$ ⚠ $y = y(x)$

(2) Auflösen nach y': $y' = \frac{\cos(x)(1-y^2)}{2\sin(x)y}$

(3) Orth. Traj. $\boxed{y' = -\frac{1}{f(x,y)}}$ $y' = -\frac{\sin(x)2y}{\cos(x)(1-y^2)}$

(4) DGL Lösen



Orthogonaltrajektorie einer Kurvenschar

(0) Wenn Kurvenschar gegeben mit C — sehe Anhang

↳ DGL einer Kurvenschar

$\boxed{y^2 = 2Cx} \Rightarrow y = \sqrt{2Cx}$

nach C umformen $C = \ldots$

(1) Ableiten nach x $\quad 2yy' = 2C$ (Kettenregel) $\Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{2Cx}}$

(2) Scharparameter eliminieren $C = \frac{y^2}{2x}$

Für oblique Traje. $\boxed{y'_{ob} = \frac{y + \tan\alpha}{1 - y\tan\alpha}}$

(3) Einsetzen $\cancel{2}y y' = \cancel{2}\cdot\frac{y^2}{2x} = y' = \frac{\frac{y^2}{2x}}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{y^2}{2x}\right)x}} = \frac{\frac{y^2}{2x}}{y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{y}{2x}}$

(1) Für Orthogonaltrajektorie $\boxed{y'_{OT} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{f(x,y)}}$ ⇒ Auf diese Form bringen

$y'_{OT} = -\frac{1}{\frac{y}{2x}} = -\frac{2x}{y}$

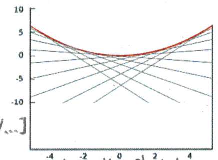
(2) DGL Lösen $\quad y'y = -2x \quad \frac{1}{2}y^2 = -x^2 + C \quad y = \sqrt{-2x^2 + 4C^2} \quad 4C^2 = D$

$\int y\,dy = \int -2x\,dx \quad y^2 = -2x^2 + 2C \quad |\sqrt{\ } \quad \boxed{y = \sqrt{-2x^2 + D}}$

ENVELOPPEN (einer Kurvenschar)

↳ Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve einer Kurvenschar berührt ⇒ existiert nicht immer

Enveloppe finden



(1) Löse GGS:

a) $F(x,y,c) = 0$

b) $F_c(x,y,c) = 0 \Rightarrow C = [x + y \ldots]$

(2) C eliminieren ⇒ C in $F(x,y)$ originale Fkt. einsetzen

wenn C kompliziert ist z.b. $C = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ man könnte mit $x(C)$, $y(C)$ arbeiten. — C als Parameter

⇒ nach $x(C) = C^3 \ldots$ umformen.

$y = \sqrt{1 - (x-K)^2}$

$F(x,y,K) = 1 - (x-K)^2 - y^2 \quad | \cdot (-1) \quad$ (I)

$(x-K)^2 + y^2 - 1 = 0$

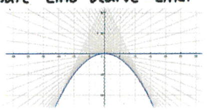
$F_K(x,y,K) = -2(x-K) \quad$ (II)

$-2(x-K) = 0$

$x = K$ in (I) $\quad (K - \cancel{K})^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

CLAIRAUT'SCHE DGL

Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve einer Geradenschar berührt



Form Geradenschar: $y = cx + g(c)$

Ableiten nach x: $y' = c$

Form DGL: $\boxed{y = y'x + g(y')}$

Allg. Lösung: $y = cx + g(x)$

Singu. Lösung: Enveloppe

$y - xy' = \sqrt{y'^2 + 1}$

allg. Lsg: $y - xC = \sqrt{C^2 + 1}$ (Schar von Geraden)

sing. Lsg: $F(x,y,C) = \sqrt{C^2+1} + xC - y = 0$ (I)

$F_C(x,y,C) = \frac{C}{\sqrt{C^2+1}} + x \Rightarrow x = -\frac{C}{\sqrt{C^2+1}}$ in (I)

$y = \frac{1}{\sqrt{C^2+1}}$

DGL 3-parametrige Kurvenschar

↳ 3x Ableiten

↳ nach Parametern auflösen

Von Niveaulinie zu DGL $f:(x,y) \rightarrow f(x,y)$

(1) Gleichung für Niveaulinien: $f(x,y) = C$

(2) Totale Ableitung: $f_x(x,y) + f_y(x,y)\cdot y' = 0$

(3) Nach y' auflösen: $\boxed{y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}}$ → DGL

Von Niveaulinie zu Vektorfeld

(1) - (3) oben

(4) zugehöriges Vektorfeld: $y'(x) = \frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}$

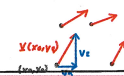
↳ Daraus folgt: $\underline{v}(x,y) = C\begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \end{pmatrix}$ oder $C\cdot\begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix}$

Zusammenhang Vektorfeld & DGL

Von Vektorf. zu DGL:

Von Vektorfeld zu Feldlinie: $\boxed{y'(x) = \frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}}$ → y finden

⚠ $y' = \frac{v_2}{v_1}$ verliert Infos. von Geschw. und ±-Richtung von $\underline{v}$!



DGL HÖHERER ORDNUNG - HOMOGENE LÖSUNG

$y'' = g(x, y, y')$

(A) DGL mit konst. Koeffizienten

Form: $\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_0 y = 0}$ $a_i \in \mathbb{R}$

Ansatz: $\boxed{y = e^{\lambda x}} \Rightarrow y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$

Charak. Gleichung: $\boxed{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0}$

$P(\alpha)$ = charakteristisches Polynom

Lösung der Gleichung heißen Eigenwerte

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots$ reell $\rightarrow y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x} + \cdots$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots$ reell $\rightarrow y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + C_3x^2e^{\lambda x} + \cdots$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0 \rightarrow y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots$

d) $\lambda_{1,2} = a \pm bi \rightarrow y = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$

e) $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \cdots = a \pm bi \rightarrow y = e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)) + e^{ax}x(C_3\cos(bx) + C_4\sin(bx)) + \cdots$

⚠ 2x selbe Lsg → mit x multipliz.

Bsp. $y'' - 7y' + 10y = 0 \quad \rightarrow \lambda^2 - 7 + 10$

$\lambda^2\cancel{e^{\lambda x}} - 7\lambda\cancel{e^{\lambda x}} + 10\cancel{e^{\lambda x}} = 0$ ↳ abc-Formel

(B) EULER-DGL

Form: $\boxed{a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0}$

Ansatz: $\boxed{y = x^\alpha \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}}$ $\frac{1}{x^n} \rightarrow \alpha\ln x$

Indexpolynom: $x^2y'' - y'x + 2y = 0$

$I(\alpha) = a_n\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)) + a_{n-1}\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-2)) + \ldots a_1\alpha + a_0 = 0 \; [a_3(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha + a_2(\alpha-1)\alpha + \ldots]$

a)	$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \ldots$ reell	$\rightarrow y = C_1x^{\alpha_1} + C_2x^{\alpha_2} + C_3x^{\alpha_3} + \cdots$
b)	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \ldots$ reell	$\rightarrow y = C_1x^{\alpha} + \ln(x)\, C_2x^{\alpha} + (\ln x)^2 C_3x^{\alpha} + \cdots$
c)	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = 0$	$\rightarrow y = C_1 + \ln(x)\, C_2 + (\ln x)^2 C_3 + \cdots$
d)	$\alpha_{1,2} = a \pm bi$	$\rightarrow y = x^a(C_1 \cos(b \cdot \ln x) + C_2 \sin(b \cdot \ln x))$
e)	$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = a \pm bi$	$\rightarrow y = x^a(C_1 \cos(b \cdot \ln x) + C_2 \sin(b \cdot \ln x)) + \ln(x) \cdot [x^a(C_3 \cos(b \cdot \ln x) + C_4 \sin(b \cdot \ln x))]$

⚠ 2x selbe Lsg → mit $\ln(x)^n$ multipliz.

Bsp. Allgemeine Lsg. gemischter Nullstellen $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, $x_3 = 2$, $x_{4,5} = 0$

$C_1 + C_2 \log(x) + C_3 x^2 + C_4 x \cos(2\log(x)) + C_5 x \sin(2\log(x))$

DGL HÖHERER ORDNUNG – PARTIKULÄRE LSG

(A) GESCHICKTER ANSATZ → Analog 1. Ordnung

(B) VARIATION DER KONSTANTEN

(1) $y_h = C_1 u(x) + C_2 v(x)$

(2) $y = C_1 u(x) + C_2 v(x)$

(3) $C_1' u + C_2' v = 0$
$C_1' u' + C_2' v' = g(x)$

(4) $$\boxed{C_1'(x) = \frac{-g(x) \cdot v}{uv' - u'v} \qquad C_2'(x) = \frac{g(x) \cdot u}{uv' - u'v}}$$

(5) C_1' und C_2' integrieren

$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

(H) $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$

(P) $y(x) = \gamma_1(x)e^{-x} + \gamma_2(x)xe^{-x}$

$\gamma_1' e^{-x} + \gamma_2' x e^{-x} = 0$

$\gamma_1' \cdot -e^{-x} + \gamma_2' \cdot (e^{-x} - xe^{-x}) = 4e^{-x}$

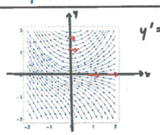
$$\gamma_1'(x) = \frac{-4e^{-x} \cdot xe^{-x}}{e^{-x} \cdot (e^{-x} - xe^{-x}) - (-e^{-x})xe^{-x}} = -4x$$

$$\gamma_2'(x) = \frac{4e^{-x}\, e^{-x}}{e^{-x} \cdot (e^{-x} - xe^{-x}) - (-e^{-x})xe^{-x}} = 4 \quad \Big| \int$$

$\gamma_1(x) = -2x^2 + C_1$

$\gamma_2(x) = 4x + C_2$

$y = (-2x^2 + C_1)e^{-x} + (4x + C_2)xe^{-x}$



$y' = 0 \Rightarrow$ horizontal

DÄMPFUNG

DGL der Form: $\ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \omega^2 y = 0$

$\lambda > \omega \Rightarrow$ starke Dämpfung

$\lambda = \omega \Rightarrow$ kritische Dämpfung

$\lambda < \omega \Rightarrow$ schwache/keine Dämpfung

$\alpha_{1/2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ wobei λ und ω konst. Koeffizienten sein müssen

SYSTEME VON DGL

$\dot{x}(t) = a_{11}x + a_{12}y + b_1$

$\dot{y}(t) = a_{21}x + a_{22}y + b_2$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Zum Lösungsverfahren:

1. LIN. ALG - METHODE Nur wenn A diagon.

$$\boxed{\vec{z} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A\vec{z} + \vec{b}}$$

$\dot{x} = x + 4y \qquad x(0) = 0$

$\dot{y} = 2x + 3y \qquad y(0) = 3$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(1) EW und EV

$\boxed{\det(A - \lambda I)}$ $\qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -1$

$\boxed{(A - \lambda_i I)x = 0}$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tipp: $\boxed{\Sigma \lambda_i = \mathrm{spur}(A) \qquad \Pi \lambda_i = \det(A)}$

(2) Allgemeine Lsg nach Schema zsmbauen:

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \ldots$ reel $\qquad y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{\lambda_3 x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \ldots$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots$ reel $\qquad y(x) = c_1 e^{\lambda x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 x e^{\lambda x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + c_3 x^2 e^{\lambda x}\begin{pmatrix} EV \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \ldots$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots = 0$ $\qquad y(x) = c_1 \begin{pmatrix} EV \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 x \begin{pmatrix} EV \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + c_3 x^2 \begin{pmatrix} EV \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \ldots$

Multiplikation mit x nur wenn A nicht Diagonalisierbar ist

$\lambda_{1,2} = a + bi$ $\qquad y(x) = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))\begin{pmatrix} c \\ di \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c \cdot e^{ax}\cos(bx) + i c e^{ax}\sin(bx) \\ di\, e^{ax}\cos(bx) - d e^{ax}\sin(bx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ax} c \cos(bx) \\ -e^{ax} d \sin(bx) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{ax} c \sin(bx) \\ e^{ax} d \cos(bx) \end{pmatrix}$

$y(x) = C_1 \cdot \mathrm{Re} + C_2 \cdot \mathrm{Im} = C_1 e^{ax}\begin{pmatrix} c\cos(bx) \\ -d\sin(bx) \end{pmatrix} + C_2 e^{ax}\begin{pmatrix} c\sin(bx) \\ d\cos(bx) \end{pmatrix}$

⇒ Lsg. für komplex konj. Paar inbegriffen

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x(t) = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$

(3) AWB (falls vorhanden)

2. ELIMINATIONSMETHODE Linalg Methode ist bisschen besser

$\dot{x} = 5x + y$

$\dot{y} = -4x + y$

(1) Erste DGL nach y auflösen

$y = \dot{x} - 5x$

(2) Ableiten wie folgt

$\dot{y} = \ddot{x} - 5\dot{x}$

(3) Einsetzen in 2. DGL und = 0 setzen

$\ddot{x} - 5\dot{x} = -4x + (\dot{x} - 5x)$ (vereinfachen)

$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$

(4) λ in allg. Lsg. einsetzen

$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$

(5) Ableiten — Produkt + Kettenregel ⚠

$\dot{x} = 3C_1 e^{3t} + C_2 t \cdot 3e^{3t} + C_2 e^{3t}$

(6) $\dot{x}$ und x in (1) einsetzen + vereinfachen

$y = \dot{x} - 5x = 3C_1 e^{3t} + C_2 t \cdot 3e^{3t} + C_2 e^{3t} - 5(C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t})$

$e^{3t}(3C_1 + 3C_2 t + C_2) - 5C_1 e^{3t} + 5C_2 t e^{3t}$

$e^{3t}(3C_1 + 3C_2 t + C_2 - 5C_1 - 5C_2 t$

$e^{3t} \; -2C_1 - 2C_2 t + C_2$

$\underline{(C_2 - 2C_1)e^{3t} - 2C_2 t e^{3t} = y(t)}$

STABILITÄT UND GGW

GGWPunkt: Punkt ohne Bewegung ≙ alle Ableitungen sind dort Null

Aussagen über Stabilität treffen

Falls nicht linear: (sonst direkt ⇒ (4))

$\dot{x} = x^2 + y^2 - 1 := f$
$\dot{y} = x^2 - y^2 := g$ } nicht linear!

(1) GGW-Punkte

$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{array}\right\} \left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}; \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = (x_0, y_0)$

(2) Partielle Ableitungen am GGWP

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \overset{(x_0,y_0)}{=} \sqrt{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \overset{(x_0,y_0)}{=} \sqrt{2}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \overset{(x_0,y_0)}{=} \sqrt{2} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2x \overset{(x_0,y_0)}{=} -\sqrt{2}$

(3) In neues KS einführen

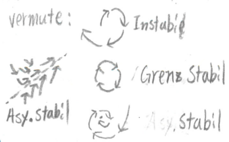
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \eta \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \xi + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \eta \end{aligned}}$$

$\dot{\xi} = \sqrt{2} \cdot \xi + \sqrt{2} \cdot \eta - 2$
$\dot{\eta} = \sqrt{2}\,\xi - \sqrt{2}\,\eta$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{-\lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) Vom System EW und damit Stabilität bestimmen

Es gilt:

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$	→ Asymptotisch stabil
$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$	→ Grenzstabil
$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$	→ instabil



$\lambda \rightarrow$ wie immer $\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2}_{\mathrm{Re} > 0} \Rightarrow$ instabiler GGWP in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

PHASENPORTRAIT

↳ Schar der Lsg. des Systems DGL bilden: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{xy}{-x^2}$, dies lösen ← BSP.

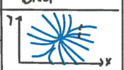
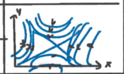
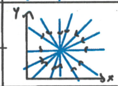
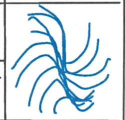
Geschwindigkeit Partikel in Abhängigkeit Ort

⇒ stationären Strömungsfeld

- Kurve der Partikeln: Trajektorie
- Menge aller Trajektorien: Phasenportrait

$$\boxed{y'(x, y) = \frac{\dot{y}(x, y)}{\dot{x}(x, y)} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}}$$

↑ nicht tatsächlich ableiten

EW	Diag.	det (A)		Phasenp.	Bild
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	ja	>0	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	stabiler Knotenpunkt	
			$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	instabiler Knotenpunkt	
		<0	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$	instabiler Sattelpunkt	
			$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	stabiler Sattelpunkt	
$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	ja	(>0)	$\lambda_1 < 0$	stabiler Stern	
			$\lambda_1 > 0$	instabiler Stern	
	nein	(>0)	$\lambda_1 < 0$	Stabiler eintangentialer Knoten	
			$\lambda_1 > 0$	instabiler eintangentialer Knoten	
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$	ja	$\lvert\lambda_1\rvert > 0$	$R(\lambda_{1,2}) = 0$	Wirbelpunkt	
			$R(\lambda_{1,2}) < 0$	stab. Strudelp.	
			$R(\lambda_{1,2}) > 0$	instabiler Strudelpunkt	

POTENZREIHEN

Allgemein: Potenzreihe der Fkt $f(x)$ um Entwicklungszentrum x_0

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$ → Entwicklungspunkt

RECHENREGELN

- Gliedweise Addition/Subtraktion
- Gliedweise Ableitung/Integral
- keine gliedweise Multiplikation/division

KONVERGENZ

Reihe konvergiert $|x - x_0| < \rho$ // divergiert für $|x - x_0| > \rho$

$$\boxed{\rho = \text{Konvergenzradius} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

METHODEN UM KOEFFIZIENTEN ZU FINDEN

Zuerst überprüfen ob gerade/ungerade:

• gerade	$f(-x) = f(x)$	$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$
• ungerade	$f(-x) = -f(-x)$	$a_0 = a_2 = \ldots = 0$

- **Taylorreihenentwicklung**

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$

⇒ möglichst vermeiden

⇒ eignet sich für cos/sin

Ziel: Muster erkennen

- **Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich**

Bsp. Nicht verschwindene Koeffizienten von $f(x) = \frac{\sin 2x}{e^x}$

Ziel: $\frac{\sin 2x}{e^x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \quad | \cdot e^x$

$\sin 2x = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots) \cdot e^x$

aus Tabelle:

$\sin 2x$: $\qquad e^x$:

$2x - \frac{8x^3}{6}\frac{2^3}{3!} + \frac{32}{120}\frac{2^5}{5!}x^5 - \ldots = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) \cdot \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$

$\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \ldots\right) = a_0 + (a_0 + a_1)x + \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3\right)x^3$ ← bereits geordnet und vereinfacht

Koeffizientenvergleich:

$a_0 = 0 \qquad \underbrace{a_0}_{0} + a_1 = 2 \qquad \underbrace{\frac{a_0}{2} + a_1}_{2} + a_2 = 0 \qquad a_2 = -2$

$\underbrace{\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2}_{-1} + a_3 = -\frac{4}{3} \qquad a_3 = -\frac{1}{3}$

Lsg. einer DGL in Form einer Potenzreihe:
Nehme Ansatz:
$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots$
$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \ldots$
und setze direkt in DGL ein

- **Aus bekannten Reihen aus Tabelle umformen**

$f(x) = \frac{x}{9 + x^2} \qquad x_0 = 0$

$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{x}{9 + x^2} = \frac{x}{9} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x}{3})^2} = \underline{\frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^n}$

- **Verallgemeinerter Binomialkoeffizient**

$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$ mit $\binom{\alpha}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha - j + 1}{j} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots}$

Bsp. Potenzreihe finden $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2} \quad x_0 = 0$

$f(x) = [1 + (-2x^2)]^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n} \cdot (-2x^2)^n$

$= 1 + \frac{1/2}{1} \cdot (-2x^2) + \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{1 \cdot 2} \cdot (-2x^2)^2 + \frac{(1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-2x^2)^3 \ldots$

$= 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{5}{8}x^8 - \ldots$

- **Partialbruchzerlegung**

→ Term durch PBZ trennen und als Summe P.R. darstellen

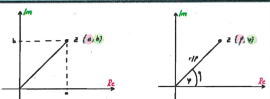
KOMPLEXE ZAHLEN

Definition $\boxed{i^2 = -1}$ $\boxed{e^{i\pi} = -1}$

DARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN ZAHL

$z = a + ib$ (18)

Realteil (Re) — Imaginärteil (Im)



a) Kartesischen Darstellung $\boxed{z = a + ib}$ $\boxed{a = \rho \cdot \cos\varphi \quad b = \rho \cdot \sin\varphi}$

b) Trigonometrische Darstellung

$\boxed{\rho = (\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right); & x>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi; & x<0 \end{cases}$ ← $\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2}}$

c) Polardarstellung $\rho\angle\varphi°$ d) Eulerschedarstellung $\rho e^{i\varphi}$ ⚠ RAD

BETRAG UND ARGUMENT

$r = \rho = |z| \longrightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \arg(z)$

* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

KONJUGIERTE

$\bar{z} = a - ib = |\bar{z}| \longrightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \rho$

Es gilt: $|z| \cdot |\bar{z}| = \rho^2 \longrightarrow \boxed{\rho = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$ (19)

$z = a + bi = \rho\angle\varphi° = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$

$\bar{z} = a - bi = \rho\angle{-\varphi°} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}$

Nützlich:

$Re(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $Re(z) = \cos\varphi$ $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ $Im(z) = \sin\varphi$ $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$

RECHNEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

Addition / Subtraktion ⇒ (18)

$\boxed{(\underbrace{\rho_1\cos\varphi_1}_{a} \pm \underbrace{\rho_2\cos\varphi_2}_{c}) + i(\underbrace{\rho_1\sin\varphi_1}_{b} \pm \underbrace{\rho_2\sin\varphi_2}_{c})}$ polar / kart.

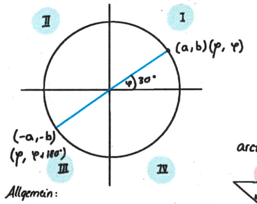
Potenzieren: $\boxed{z^n = (r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}}$

Bsp. $(\sqrt{3}+1)^6 = (2\cdot e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = 2^6 \cdot e^{i\frac{6\pi}{6}} = 64 \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} = -64$

FORMEL VON MOIVRE

- $\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \ldots$
- $\sin(n\varphi) = \cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots$

QUADRANTEN IM EINHEITSKREIS: ZUSAMMENHANG



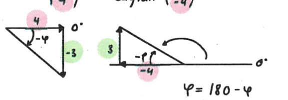
$\boxed{\varphi = \arctan\frac{b}{a} \quad \varphi = \varphi + k\pi}$

Allgemein:

I = $\arctan\frac{b}{a}$ III = $\arctan\frac{-b}{-a}$

II = $\arctan\frac{b}{-a}$ IV = $\arctan\frac{-b}{a}$

$\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)$ $\arctan\left(\frac{3}{-4}\right)$



$\varphi = 180 - \varphi$

LÖSEN VON GLEICHUNGEN IN K. EBENE

WURZELZIEHEN / POTENZEN

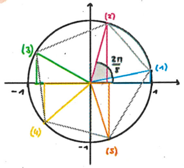
$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}}$ Lösungen im Kreis mit $r = \sqrt[n]{|z|}$ $\boxed{z = r \cdot e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)}}$ $\boxed{\arg(z_k) = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$

Bsp • $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$ → 5 versch. Lsg. ≙ $z^5 = \sqrt{3}+i$

(1) Radius und φ berechnen $r = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+i^2} = \sqrt{3+1} = 2$ $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} = 30°$

(2) Wie folgt: $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[5]{2e^{\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi}} = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6\cdot 5}+\frac{k\cdot 2\pi}{5}\right)} = \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{\pi + k 12\pi}{30}}$

(3) $k = 0,1,2,3,4$ setzen



$\measuredangle = k \cdot \frac{2\pi}{n}$

(1) $\measuredangle = \frac{\varphi}{n}$

$\left.\begin{array}{ll} \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{30}} & (1) \\ \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{13\pi}{30}} & (2) \\ \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{25\pi}{30}} & (3) \\ \sqrt[5]{2}\cdot e^{i\frac{37\pi}{30}} & (4) \\ \sqrt[2]{5}\cdot e^{i\frac{49\pi}{30}} & (5) \end{array}\right\} \sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$

EINSCHUB: QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

› Diskriminante negativ ⇒ Gleichung 2 komplex-konjugierte Lsg. $\boxed{D = (b^2 - 4ac)}$

Bsp. $x^2 + 2x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 3}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}i}{2} = \frac{\cancel{2}(-1\pm\sqrt{2}i)}{\cancel{2}} = -1\pm\sqrt{2}i$

$= (x-(-1+\sqrt{2}i))(x-(-1-\sqrt{2}i))$

POLYNOME HÖHERER ORDNUNG

› Polynom n-Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen genau n-Nullst

→ Sind Koeffizienten reel, dann sind N.S. reel oder in konjugierten-komplex.-Paare

→ Multiplikation zweier kom.-konj. Linearfaktoren ⇒ quadratis. Polynom mit reelen Koef.

↳ $(z-z_1)(z-z_2)$ ↳ Faktor Polynoms

Nullstellen finden

(1) Komp.-konj. von x_1 Nullstelle: $x_2 = \bar{x}_1 = 1-2i$

(2) Multiplikation beider Linearfaktoren

(3) Polynomdivision

Bsp. $x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 14x^2 + 9x - 10$ $x_1 = 1+2i$ schon bekannt

(1) $x_2 = \bar{x}_1 = 1-2i$

(2) $(x-(1-2i))(x-(1+2i)) = x^2 - 2x + 5$

(3) $x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 14x^2 + 9x - 10 \div (x^2 - 2x + 5) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Tipps: Erraten N.S. ⚠ falls Rest → = 0 setzen

- zuerst $1, -1, i, -i$ versuchen
- dann weitere reele ganze Zahlen, wobei Teiler des konstanten

Zusammenhang cos/sin

$\boxed{\cos\varphi = Re(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}}$ $\boxed{\sin\varphi = Im(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi}-e^{i\varphi}}{2i}}$ $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Nützliches zu komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$

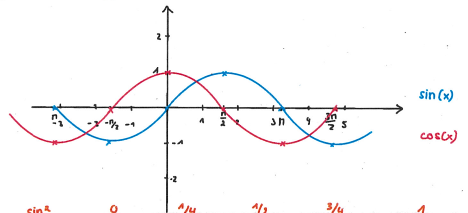
$\sqrt{-4} = \sqrt{-1\cdot 4} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{4} = \pm i\cdot 2$ $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\sqrt{3}}{3}$

Nützliche / äquivalente Umformungen

- $16^{3/2} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt[2]{16\cdot 16^2}$
  $= 16\cdot\sqrt{16} = 16\cdot 4 = 64$
- $x = a^3 \Rightarrow x^{1/3} = a$
- $\log(1) = 0$
- $e^0 = 1$
- $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ • $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\sqrt[6]{8} = 8^{1/6} = 2^{3\cdot 1/6} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$
- $\frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{15}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = 5\sqrt{3}$
- $\frac{(1-x^2)}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}$

ANHANG

TRIGONOMETRIE



sin²	0	1/4	1/2	3/4	1
	$0/0°$	$\frac{\pi}{6}/30°$	$\frac{\pi}{4}/45°$	$\frac{\pi}{3}/60°$	$\frac{\pi}{2}/90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

eine Drehung in pos. x-Achse!

	SIN	COS	TAN	COT
0 o 2π	0	1	0	$\pm\infty$
π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
π/2	1	0	$\pm\infty$	0
2π/3	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
3π/4	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
5π/6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	$\pm\infty$
7π/6	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
5π/4	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1
4π/3	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
3π/2	-1	0	$\pm\infty$	0
5π/3	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
7π/4	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1
11π/6	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$

$\int$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin x	1	2	0	0	0
sin² x	π/4	π/2	π	π/2	π
sin³ x	2/3	4/3	0	0	0
sin⁴ x	(3π)/16	(3π)/8	(3π)/4	(3π)/8	(3π)/4
cos x	1	0	0	2	0
cos² x	π/4	π/2	π	π/2	π
cos³ x	2/3	0	0	4/3	0
cos⁴ x	(3π)/16	(3π)/8	(3π)/4	(3π)/8	(3π)/4
sin x cos x	1/2	0	0	0	0
sin² x cos x	1/3	0	0	2/3	0
sin x cos² x	1/3	2/3	0	0	0

$\boxed{\sin = \frac{G}{H} \quad \cos = \frac{A}{H} \quad \tan = \frac{G}{A}}$

RAD → GRAD

$\alpha = \frac{x}{2\pi}\cdot 360°$

GRAD → RAD

$x = \frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi$

Nullstellen sin, cos

$\sin(ax) = 0$

$\boxed{ax = k\cdot\pi}$ $|:a$

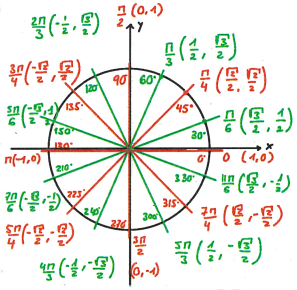
$x = \frac{k}{a}\pi$

Periode: $2\pi k$

$\cos(ax) = 0$

$\boxed{ax = \frac{1}{2}\pi + k\pi}$ $|:a$

$x = \frac{1}{2a}\pi + \frac{k}{a}\pi$



$\csc x = \frac{1}{\sin x}$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Trigonometr. Identitäten

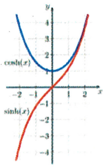
$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$1 - \cos\varphi\sin\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

Hyperbolische / Areafkt. S. 60

$\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$ ungerade / gerade ⚠ nicht periodisch



⇒ $D = -\infty < x < \infty$ $W = -\infty < \sinh x < \infty$

$1 \leq \cosh x < \infty$

• Ableitung: $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

• **Zusammenhänge, Additionstheoreme, Summenformel**

$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \cosh x + \sinh x = e^x}$

Bsp.

$e^t - e^{-t} = 2\sinh(t)$ $e^z - e^{-z} = 2\sinh(z)$

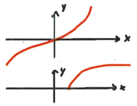
$e^t + e^{-t} = 2\cosh(t)$ $4e^z + 3e^{-z} = e^z + 6\cosh(z)$

$\boxed{\sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y \quad \cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y}$

$\boxed{\begin{array}{l} \sinh x \pm \sinh y = 2\sinh\frac{x\pm y}{2}\cosh\frac{x\pm y}{2} \\ \cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} \\ \cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} \end{array}}$

• **Umkehrfkt**

$\boxed{\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})}$



Definition der Intervalle

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ $(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$[a,b] \rightarrow$ enthält a und b $(a,b) \rightarrow$ enthält kein a, kein b

$[a,b) \rightarrow$ enthält a, kein b

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$\sin x$	$\sin x$	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\cot^2 x+1}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	$\frac{1}{\csc x}$
$\cos x$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\sqrt{\cot^2 x+1}}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 x-1}}{\csc x}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$	$\sqrt{\sec^2 x-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 x-1}}$
$\cot x$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\sqrt{\csc^2 x-1}$
$\sec x$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\sqrt{\cot^2 x+1}}{\cot x}$	$\sec x$	$\frac{\csc x}{\sqrt{\csc^2 x-1}}$
$\csc x$	$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\sqrt{\cot^2 x+1}$	$\frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\csc x$

BIONOMISCHE / GEOMETRISCHE / SPEZIELLE REIHEN

$e^x \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ (79)

$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2 \ldots \quad -1<\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3 \pm \ldots \quad -1<\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1-x^2+x^4 \cancel{-6} -x^6 \pm \ldots \quad -1<\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1+x^2+x^4+x^6+\ldots \quad -1<\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{a-x}$	$\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots\right) \quad -a< \lvert x\rvert<a$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = 1-2x+3x^2 \pm \quad \lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1+2x+3x^2+\ldots \quad \lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{(1\mp x)^3}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n (1+n)(2+n) \cdot(-1) = 1 \mp 3x + 6x^2 \mp 10x^3 \ldots$
$\frac{1}{(x-a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a^2}\left(1+2\cdot\frac{x}{a}+3\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots\right) \quad \lvert x\rvert<a$
$\ln(1+x)$	$\int_1^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \ldots x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \ldots \quad -1<x\le$
$\ln(1-x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!} \ldots \quad \lvert x\rvert<1$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right) \quad \lvert x\rvert>1$
$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots\right)$
$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2!(2n+1)} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9} \pm \ldots \quad x\in\mathbb{R}$
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{3x^4}{128}+\frac{7x^5}{256} \quad -1\le x\le 1$
$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5 \ldots \quad x\in\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 + \ldots \quad x\in\mathbb{R}$
$\ln x$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3 \quad 0<x\le 2$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad x\in\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \quad x\in\mathbb{R}$

$\int \square\, dx \qquad F(x)+C$

$\frac{2x}{x^2+1} \longrightarrow \ln\lvert x^2+1\rvert$

$\sin^5(t)\cos(t) \longrightarrow \frac{1}{6}\sin^6(t)$

$x\cos(x) \longrightarrow x\sin(x)+\cos(x)$

$\cos(4x) \longrightarrow \frac{1}{4}\sin(4x)$

$\cos(x)\sin(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\sin^2(x)$

$\frac{1}{x\ln(x)} \longrightarrow \ln(\ln(x))$

$\cos^3 x \longrightarrow \left(\sin x - \frac{\sin^3(x)}{3}\right)$

$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow \left(\sqrt{x^2-1}\right)'$

$(x+1)e^x \longrightarrow (xe^x)'$

$\cos^2 x \longrightarrow -\left(\frac{x+\sin x\cos x}{2}\right)'$

$e^{ax}\sin(bx) \longrightarrow \left(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))\right)'$

$\sin x\cos^n x \longrightarrow \left(-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\right)'_{n\ge 0}$

$\sqrt{1+x^2} \longrightarrow \left(\frac{\operatorname{Arsinh}(x)+x\sqrt{1+x^2}}{2}\right)$

$\cosh^2(x) \longrightarrow \left(\frac{x+\sinh(x)\cosh(x)}{2}\right)'$

$\frac{1}{x^2+x-6} \longrightarrow \left(\frac{1}{5}\ln\left\lvert\frac{x-2}{x+3}\right\rvert\right)'$

$\frac{4x-3}{x^2+x+1} \longrightarrow \left(2\ln(x^2+x+1)-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)'$

$2x\sqrt{r^2-x^2} \longrightarrow \left(-\frac{2}{3}(r^2-x^2)^{3/2}\right)$

$x\sin x \longrightarrow (-x\cos x+\sin x)'$

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \left(-\sqrt{1-x^2}\right)'$

$\frac{2x}{x^2+1} \longrightarrow \left(\ln\lvert x^2+1\rvert\right)'$

$xe^x \longrightarrow ((x-1)e^x)'$

$\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \longrightarrow \left(2\arctan\sqrt{e^x-1}\right)'$

$\frac{x}{x^4+3} \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)\right)'$

$\frac{1}{\cosh x} \longrightarrow \left(2\arctan(e^x)\right)'$

$\frac{1}{x^3+x} \longrightarrow \left(\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert\right)'$

$\frac{1}{x\ln x} \longrightarrow \left(\ln(\ln(x))\right)'$

$\frac{1}{a^2+x^2} \longrightarrow \left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)'$

$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \longrightarrow \left(\ln(x+\sqrt{x^2+4})\right)'$

$\int\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$\int\frac{x}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+a\rvert+C$

$\int\frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\lvert ax^2+b\rvert+C$

$\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

$\int\frac{x}{(x^2\pm a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2\pm x^2)^{n-1}}+C$

$\int\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{y}{x^2+y^2}+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+C$

$\int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)+C$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

$\int\frac{(\ln(x))^n}{x}\,dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1}+C$

$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$

$\int\frac{1}{e^x+a}\,dx = \frac{x-\ln(a+e^x)}{a}+C$

$\int\frac{1}{e^x-a}\,dx = \frac{\ln(e^x-a)-x}{a}+C$

$f(x) \qquad f'(x)$

$\sin x\cos x \rightarrow \cos^2(x)-\sin^2(x)$

$-\ln(\cos(x)) \rightarrow -\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\sin(x)$

$\cos^3(x) \rightarrow -3\cos^2(x)\sin(x)$

$(\cos(x^3)) \rightarrow -3\cos^2(x)\sin(x)$

$(\cot(x^2))' \longrightarrow -\frac{2x}{\sin^2(x^2)}$

$(\arccos x)' \longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\tan^2 x)' \longrightarrow 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$(\sqrt{\ln x})' \longrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

$(\sin(x^2))' \longrightarrow 2x\cos(x^2)$

$(\ln(1+x^2))' \longrightarrow \frac{2x}{1+x^2}$

$(\sin^2(x))' \longrightarrow 2\sin x\cos x$

$(a^x)' \longrightarrow \ln a\cdot a^x$

$(\ln^2(x))' \longrightarrow 2\frac{\ln(x)}{x}$

$\operatorname{Artanh}(x)' \longrightarrow \frac{1}{1-x^2}$

$(\arcsin x)' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' \longrightarrow -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$(\operatorname{Arcosh} x)' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

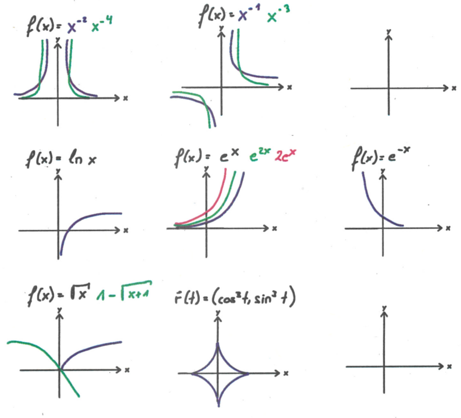
$(\operatorname{Arsinh} x)' \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\int\cot(x)\,dx = \int\frac{1}{\tan(x)}\,dx = \ln(\sin(x))+C$

$\int\coth = \ln(\sinh(x))+C$

$\frac{1}{\tanh(x)}$

Anschaulichung einiger Graphen (56)



Rot. Matrizen → Parametrisierung rotierende Kurve

2D $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

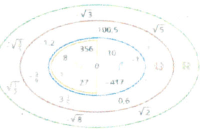
3D $\underbrace{R_x}_{\text{Achse}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Wertebereich komplizierter Fkt:

Hochpunkt, Tiefpunkt + Grenzwertbetrachtung

$\frac{x+2}{4x+2} \approx$  $W_f = \lim_{x\to\infty} = \frac{1}{4}$, $\lim_{x\to 0} = 1$ $\Big\}\ \left(\frac{1}{4}, 1\right)$



Arbeit: Fallunterscheidung

- **Arbeit entlang geschlossenen Weg, rot ≠ 0**

(1) Weg parametrisieren $\vec{r}(t)$

Wenn von Punkt zu Punkt gilt:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{pmatrix}\right)$

(2) Ableitung $\dot{\vec{r}}(t)$

(3) $W = \int v(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt$

- **Arbeit mit Stokes, geschlossenen Weg**

⚠ Im UZS $(0,0,-1)$

Gegen UZS $(0,0,1)$

(1) rot (v) berechnen

(2) $W = \iint_B \underbrace{\operatorname{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}}_{\text{Skalar}}\,dA$

- **Arbeit Weg geschlossen, rot = 0**

Arbeit Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos(x)z \\ 2\ln(z)y+2y \\ \frac{y^2}{z}+2\sin(x) \end{pmatrix}$ entlang

beliebiger Weges von Punkt $(0,3,1)$ zum Punkt $\left(\frac{\pi}{2},1,2\right)$

Stichwort: Potentialfeld

(1) $\operatorname{rot} \overset{!}{=} 0$

(2) Potential P?

$v_1 = P_x = \int 2\cos(x)z\,dx = 2\sin(x)z + \alpha(y,z)$

$v_2 = P_y = \int 2\ln(z)y+2y\,dy = \ln(z)y^2+y^2+\beta(x,z)$

$v_3 = P_z = \int \frac{y^2}{z}+2\sin(x)\,dz = y^2\ln(z)+2\sin(x)z+\gamma(x,y)$

$\Rightarrow P = 2\sin(x)z+y^2\ln(z)+y^2+c$

(3) $W = P(P_2)-P(P_1)$

$= P\left(\frac{\pi}{2},1,2\right)-P(0,3,1)-$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2+1^2\cdot\ln(2)+1^2+\cancel{c}-$

$2\sin(0)\cdot 1-3^2\cdot\ln(1)-3^2-\cancel{c} = \ln(2)-4$

KS Transformation u, v

Bsp. $x(u,v) = 2u+v$
$y(u,v) = u-3v$

$\lvert\det(J)\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\rvert = -7$

$u(x,y) = \frac{v_y}{\det(J)}+\frac{v_x}{\det(J)} = \frac{3}{7}x+\frac{1}{7}y$

$v(x,y) = \frac{u_y}{\det(J)}+\frac{u_x}{\det(J)} = \frac{1}{7}x-\frac{2}{7}y$

Vollständige Induktion

1. Induktionsanfang: Zeige, dass die Aussage zu Beginn erfüllt ist, meist für $n = 0$ oder $n = 1$.
2. Induktionsschritt: Man nimmt an, dass die Aussage für irgendein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und zeige mit dieser Annahme, dass die Behauptung dann auch für $n + 1$ gilt.

→Sind diese zwei Beweise erbracht, gilt die Aussage folglich für alle n.

2.2 Beispiele

Beispiel: Summenformel beweisen

Zu zeigen ist, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

1. Induktionsanfang

   Für $n = 1$ ergibt die linke Seite: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ und die rechte Seite $1^2 = 1$. Die Aussage gilt somit für $n = 1$.

2. Induktionsschritt

   Man nimmt an, die Aussage $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ gilt. Man muss nun damit zeigen dass dann auch gilt $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$.

   Bei solchen Induktionsbeweisen beweisen mit Summenformeln schreibt man nun die neue Summe $\sum_{k=1}^{n+1}$ mit Hilfe der alten Summe $\sum_{k=1}^{n}$ plus das $(n + 1)$-te Glied. Danach formt man so um, dass die zu zeigende Gleichung resultiert:

$$\underline{\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=n^2 \text{ (laut Annahme)}} + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = \underline{(n+1)^2}$$

   Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

Beispiel: Teilbarkeit

Folgende Aussage ist durch Induktion zu zeigen: $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist durch 7 teilbar. D.h wenn man $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ durch 7 teilt, ist das Resultat eine natürliche Zahl.

1. Induktionsanfang

   Für $n = 1$ erhalten wir $3^{2\cdot 1+4} - 2^{1-1} = 728$ und $728 \div 7 = 104$. Somit gilt die Aussage für $n = 1$.

2. Induktionsschritt

   Wir nehmen an dass $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ durch 7 teilbar ist. Damit gilt $3^{2n+4} - 2^{n-1} = 7m$ für irgendein $m \in \mathbb{N}$. Nun müssen wir zeigen, dass damit auch $3^{2(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1}$ durch 7 teilbar ist.

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1} &= 3^{2n+4} \cdot 3^2 - 2^n \\ &= (7m + 2^{n-1}) \cdot 9 - 2^n \\ &= 9 \cdot 7m + 2^{n-1}(9-2) \\ &= 7 \cdot 9m + 2^{n-1} \cdot 7 \\ &= 7 \cdot \underbrace{(9m + 2^{n-1})}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

   Dieser Term ist wiederum durch 7 teilbar. Und damit ist der Induktionsbeweis fertig.

<u>BEMERKUNG:</u> diese Aufgaben sind meist etwas schwieriger, da man oft ein einige Tricky Umformungen machen muss. Oft versucht man die Zahl, durch die man teilen soll irgendwie auszuklammern.

Beispiel: Ungleichung

Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ ab $n \geq 4$ dass gilt: $n! > 2^n$

1. Induktionsanfang

   Für $n = 4$ erhalten wir $4! = 24$ und $2^4 = 16$ und weil $24 > 16$ gilt die Aussage für $n = 4$.

2. induktionsschritt

   Wir nehmen an $n! > 2^n$ und müssen damit zeigen, dass $(n+1)! > 2^{n+1}$
   Dazu fangen wir links mal mit $(n + 1)!$ an, versuchen dann **nur > und =** zu verwenden und wollen schliesslich rechts 2^{n+1} rauskriegen:

$$\underline{(n+1)!} = (n+1) \cdot n! \underset{\text{Annahme}: n! > 2^n}{\geq} (n+1) \cdot 2^n > n \cdot 2^n \underset{n \geq 4}{\geq} 2 \cdot 2^n = \underline{2^{n+1}}$$

   Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Coole Tricks: $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x}$ auch $b = e^{\ln(b)}$

$$\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = \frac{e^{2t}+1-2}{e^{2t}+1} = \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}+1} - \frac{2}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2t}+1}$$

S.105 Kreuzprodukt Regeln → vllt. short cut für komplexer Rechnenweg. $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} = 0 + \vec{a} \times \vec{b}$

Parameter in Intergralgrenzen

Sei $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$ Satz: $\varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t,x)\,dt + f(v(x),x) \cdot v'(x) - f(u(x),x) \cdot u'(x)$

Tangentialebene

Gleichung: $ax^2 + by^2 - cz = d$

$\Rightarrow F(x,y,z) =$ konst oder 0

$\nabla F = (\ )$ ⇒ gesuchte pkt einset

$\Rightarrow \nabla F(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0,z_0) \\ F_y \ldots \\ F_z \ldots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E: F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(\ldots)(\ldots) + \ldots = 0$

oder $F_x(\ldots)x_0 + F_y(\ldots)y_0 + F_z(\ldots)z_0 = E$

$F_x(\ldots)x + F_y(\ldots)y + F_z(\ldots)z = E$

Erklärung: Pkt (x_0,y_0,z_0) einsetzen um E zu bestimmen, und dann rück setzen in Ebene Gleichung

diese Methode ist deswegen schneller

▶ DGL charakt. polyn. λ NS Lösen

wenn es höher Ordnung ist, sollte komplex gelöst werden

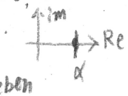
zB. $\lambda^3 = \alpha \rightarrow \lambda = \sqrt[3]{\alpha} \cdot e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)}$

$\lambda_0 = \sqrt[3]{\alpha} \cdot e^{i(0)}$ ... reel

$\lambda_1 = \ldots$ sehe Formelbuch S.19

$\lambda_2 = \ldots$

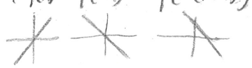
Bemerkung egal $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$, immer als positive reel zahl lösen.



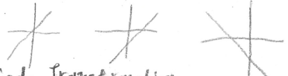
wenn es als konkrete zahlen gegeben ist, dann löse es normal.

Spiegel → Translation : $f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x-1))$

nach rechts um 1



Trans → Spiegel : $f(x) \rightarrow f(x-1) \rightarrow f((-x)-1)$



nach jede Transformation. (x) x in Klamern, und von dort aus für nächste Transformation

▶ OT ohne C, $y_\perp$ gerade.

zb. $y = x^2$ am Pkt x_0

Abb $y' = 2x$ $\quad y_0 = x_0^2$

$\hookrightarrow y_\perp' = -\frac{1}{y'} \Rightarrow y_\perp' = \frac{1}{2x_0}$ einset

$y_\perp$ ist eine Grade $\Rightarrow y_\perp = y_\perp' x + b$

$\Rightarrow x_0^2 = \frac{x_0}{2x_0} + b \Rightarrow b = x_0^2 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_\perp = \frac{1}{2x_0}x + x_0^2 - \frac{1}{2}$, x_0 als Parameter

Partiel B Zerlegung

⚠ $\frac{x+2}{10(x+5)(x-5)} \neq \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x-5)}$

muss ausgleichen

$\Rightarrow \frac{A}{10(x+5)} + \frac{B}{(x-5)}$

Extrema im B

$\nabla f = 0 \rightarrow$ Kandidate

Rand $\vec{r}(t) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) \perp \nabla f$

$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow$ Kandi

Rand ① ② ⋮

Eckpunkte → Kandi

▶ OT mit winkel α ∡

① Kurven param.

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

Steigung/Richtung der Kurve am pkt $x_0\ y_0 \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$

Steigung $k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

▶ OT Steigung: $m = -\frac{1}{k} = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$

Winkel: $\tan\alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$y^\sim = \tan(\alpha + \beta)$

↓ FB

BSP. $y^\sim = \frac{1+2x}{1-2x}$

▶ Aufleiten

$y^\sim = \ldots$

▶ OT ohne Winkel ⇒ 90°

Original mit C

zb. $y = cx^2$

$y' = 2cx \rightarrow$ Steigung. $y_\perp' = -\frac{1}{y'}$

einset.

nach c, umfo

$c = \frac{y}{x^2}$ einset. $\rightarrow y_\perp' = -\frac{1}{2cx}$

$y_\perp' = -\frac{x}{2y}$, DGL lösen.

$y_\perp = \ldots$

DEFINITIONSBEREICHE

Gebrochenrationale Fkt	Nenner darf nicht 0 werden
Logaritmusfkt	Innere Fkt muss > 0 sein $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
Wurzelfkt ungeraden Exponent	Zahlen ≥ 0 $D = \mathbb{R}^+$ $D = $ 〃

Phasenportrait

DGL Sys. $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = \ldots \\ \dot{y} = \ldots\end{array}\right] \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \ldots$

zb. $y' = 1 - \frac{y}{x}$ ← jetzt

löse diese DGL

zb. $\Rightarrow y = x^2 + cx$

Durch laufsin?

$\dot{x}$ $\dot{y}$ angucken.

zb. $\dot{x} = x$, wenn x ⊕ dann $\dot{x}$ auch ⊕

▶ Lagrange DGL y_p 2. ordnung

$y_h = c \cdot \ldots \rightarrow c_1(x)\,c_2(x) \ldots$

$\rightarrow y_p = c_1(x)\,u(x) + c_2(x)\,v(x)$

Annahme: !

$c_1'u + c_2'v = 0$

$c_1'u' + c_2'v' = g(x)$

$\rightarrow y' = c_1u' + c_2v'$

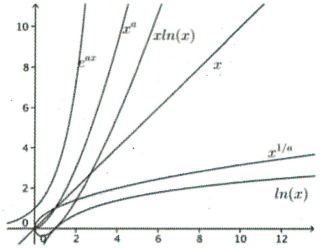
$y'' = c_1'u' + c_1u'' + c_2'v' + c_2v''$

→ Lös. c_1' c_2'

$c_1' = \frac{g(x) \cdot v}{u'v - uv'}$ $\quad c_2' = -\frac{g(x) \cdot u}{u'v - uv'}$

→ c_1, c_2 durch Integ. bestimmen

Grössenordnung



$g(y)$ ist umkerfkt von $f(x)$

$y = f(2) = 3$

was ist dort $g'(3)$? $\rightarrow y = 3 \rightarrow x = 2$

FB S.63 unten